تشریح کامل

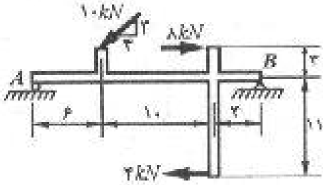
مقاومت مصالح پوپوف

(جلد اول)

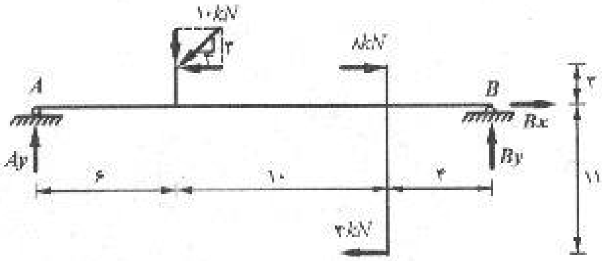
مهندس مجید بوجاریان

مسائل فصل دوم

۲-۱ و ۲-۲. مطلوب است تعیین واکنشهای ناشی از بارگذاری برای سازه‌های صفحه‌ای نشان داده شده در اشکال.



مسئله ۲-۱

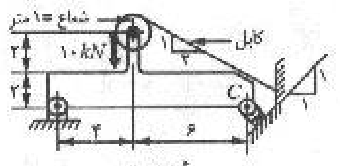


$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 : B_x + 8 - 4 - 10\left(\frac{4}{5}\right) = 0 \Rightarrow B_x = 4kN \longrightarrow$$

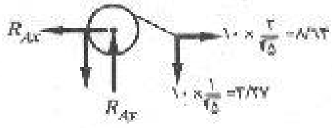
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 : B_y\,(20) + 10\left(\frac{4}{5}\right)(3) - 10\left(\frac{3}{5}\right)(6) - 8(3) - 4(11) = 0$$

$$\Rightarrow B_y = 4kN \uparrow$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 : A_y + B_y - 10\left(\frac{3}{5}\right) = 0 \Rightarrow A_y = 2kN \uparrow$$

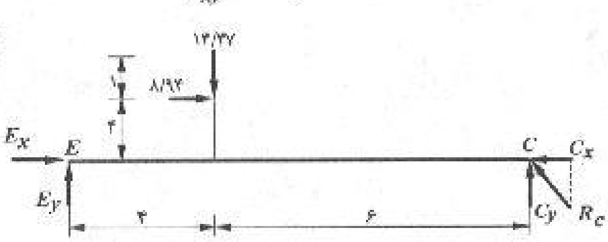


مسئله ۲-۲



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 8/94\,kN \longleftarrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 14/47\,kN \uparrow$$



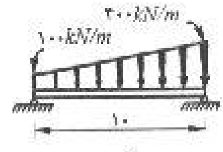
$$+\circlearrowleft \sum M_E = ۰ : c_y\,(۱۰) - ۱۴/۴۷(۴) - ۸/۹۴(۴) = ۰ \Rightarrow c_y = ۹/۳۷\,kN \uparrow$$

$$\Rightarrow C_x = ۹/۳۷\,kN \leftarrow$$

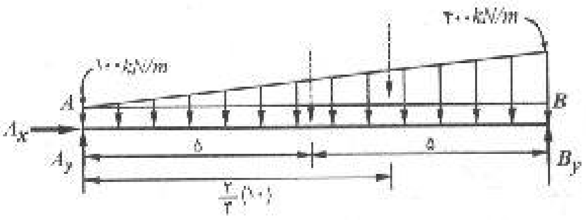
$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : E_x + ۸/۹۴ - ۹/۳۷ = ۰ \Rightarrow E_x = ۰/۴۳\,kN \rightarrow$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ : E_y + C_y - ۱۴/۴۷ = ۰ \Rightarrow E_y = ۵/۱۱\,kN \uparrow$$

۲-۳ تا ۲-۵. برای تیرهای نشان داده شده در اشکال، نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی را با استفاده از روش مقطع زدن در وسط فاصلهٔ بین دو تکیه‌گاه به دست آورید.



مسأله ۲-۳

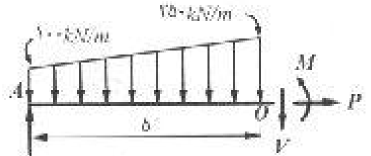


$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ : B_y\,(۱۰) - (۱۰۰\times۱۰)(۵) - \left(\frac{۱}{۲}\times ۳۰۰ \times ۱۰\right)\left(\frac{۲}{۳}\times۱۰\right) = ۰$$

$$B_y = ۱۵۰۰\,kN \uparrow$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ : A_y + B_y - \frac{۱}{۲}(۱۰۰ + ۴۰۰)(۱۰) = ۰ \Rightarrow A_y = ۱۰۰۰\,kN \uparrow$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$$



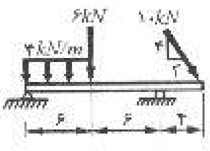
$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow P = ۰$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ : A_y - V - \frac{۱}{۲}(۱۰۰ + ۲۵۰)(۵) = ۰$$

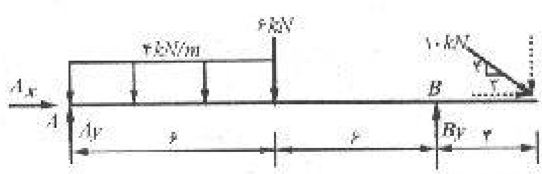
$$V = ۱۲۵\,kN \downarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_o = ۰ : M + (۱۰۰\times۵)\left(\frac{۵}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۲}\times۱۵۰\times۵\right)\left(\frac{۱}{۳}\times۵\right) - A_y(۵) = ۰$$

$$M = ۳۱۲۵\,kN.m \circlearrowleft$$



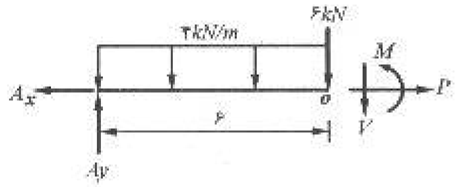
مسأله ۲-۴



$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ : B_y\,(۱۲) - \left(۱۰\times\frac{۴}{۵}\right)(۱۶) - ۶(۶) - (۴\times۶)(۳) = ۰ \Rightarrow B_y = ۱۹/۶۷\,kN \uparrow$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 : A_y + B_y - \left(10 \times \frac{4}{5}\right) - 6 - (4 \times 6) = 0 \qquad \Rightarrow A_y = 18/33\,kN \uparrow$$

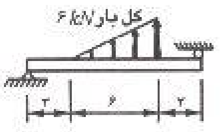
$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 : A_x + \left(10 \times \frac{3}{5}\right) \Rightarrow A_x = -6\,kN \qquad \Rightarrow A_x = 6\,kN \longleftarrow$$



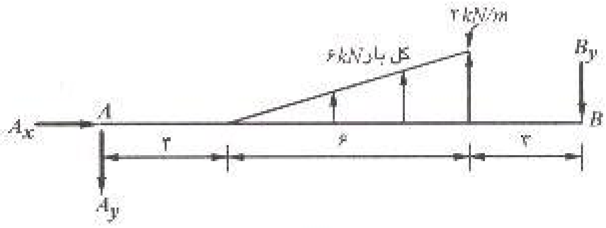
$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 :\ P - A_x = 0 \Rightarrow P = 6\,kN \longrightarrow$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 :\ A_y - V - 6 - (4 \times 6) = 0 \Rightarrow V = -11/67\,kN \Rightarrow V = 11/67\,kN \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_o = 0 : M + (4 \times 6)(3) - A_y\,(6) = 0 \Rightarrow M = 37/98\,kN.m \circlearrowleft$$



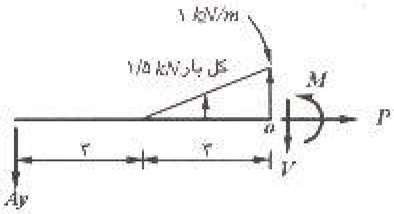
مسأله ۲-۵



$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 : 6\left[3 + \left(\frac{2}{3}\right)(6)\right] - B_y\,(12) = 0 \Rightarrow B_y = 3/5\,kN \downarrow$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 : -A_y + 6 - B_y = 0 \qquad \Rightarrow A_y = 2/5\,kN \downarrow$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

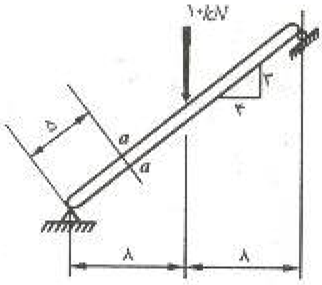


$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \Rightarrow P = 0$$

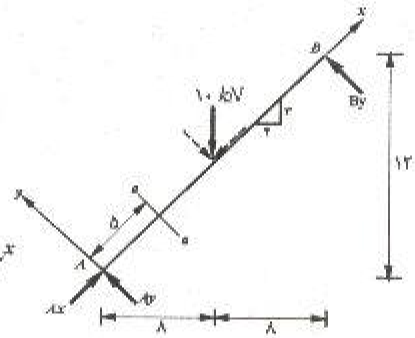
$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 : -A_y - V + 1/5 = 0 \Rightarrow V = -1\,kN \downarrow$$

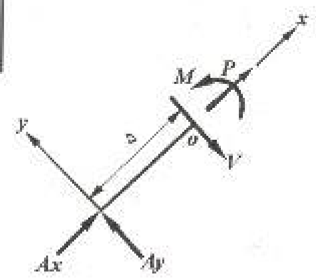
$$+\circlearrowleft \sum M_o = 0 : M + A_y\,(6) - 1/5\left(\frac{1}{3} \times 3\right) = 0 \Rightarrow M = -13/5\,kN.m \circlearrowleft$$

۲-۶ تا ۲-۱۳. برای سازه‌های صفحه‌ای نشان داده شده در اشکال، نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی را در مقطع $a-a$ به‌دست آورید. به استثنای مسأله ۲-۷، از وزن اعضا صرف‌نظر نمایید. در هر حالت، ترسیمهٔ جسم آزاد قسمت جداشدهٔ سازه را رسم نمایید و در روی آن نیروهای داخلی را با جهت صحیح نشان دهید. در حل مسائل از قرارداد علامت تیرها استفاده نمایید.



مسأله ۶-۲





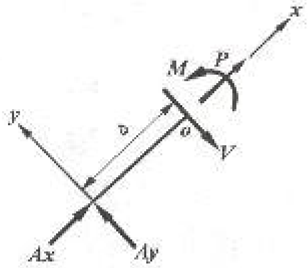
$$+\circlearrowleft \sum M_B = ۰ : -A_y\,(۲۰) + \left(۱۰ \times \frac{۴}{۵}\right)(۱۰) = ۰ \Rightarrow A_y = ۴\,kN \nwarrow$$

$$\nearrow + \sum F_x = ۰ : A_x - \left(۱۰ \times \frac{۳}{۵}\right) = ۰ \qquad \Rightarrow A_x = ۶\,kN \nearrow$$

$$\nearrow + \sum F_x = ۰ : A_x + P = ۰ \Rightarrow P = -۶\,kN \swarrow$$

$$\nwarrow + \sum F_y = ۰ : A_y - V = ۰ \Rightarrow V = ۴\,kN \searrow$$

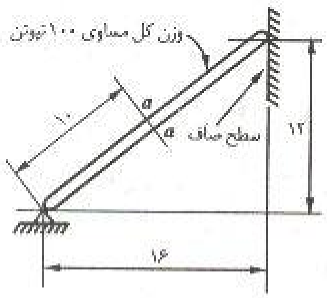
$$+\circlearrowleft \sum M_o = ۰ : M - A_y\,(۵) = ۰ \Rightarrow M = ۲۰\,kN.m$$



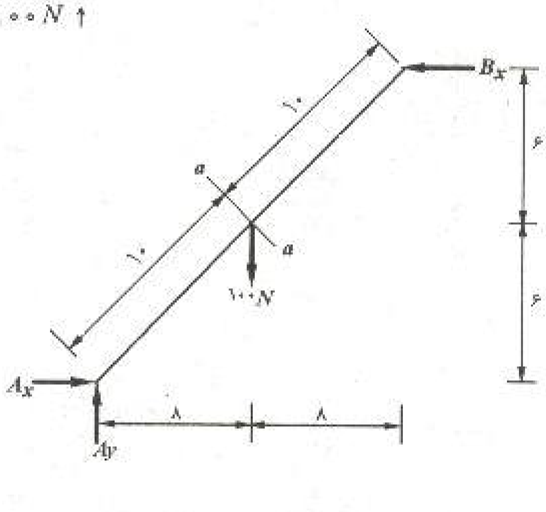
$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ : B_x\,(۱۲) - ۱۰۰\,(۸) = ۰ \Rightarrow B_x = ۶۶/۷\,N \leftarrow$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : A_x - B_x = ۰ \qquad \Rightarrow A_x = ۶۶/۷\,N \rightarrow$$

$$\uparrow + \sum F_y = ۰ : A_y - ۱۰۰ = ۰ \Rightarrow A_y = ۱۰۰\,N \uparrow$$



مسأله ۷-۲

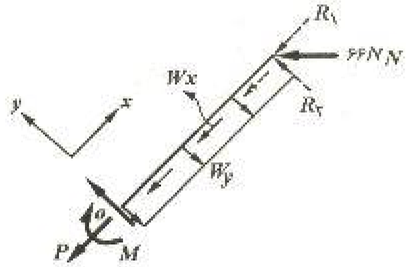


$$R_۱ = ۶۶/۷\left(\frac{۱۶}{۲۰}\right) = ۵۳/۴N$$

$$R_۲ = ۶۶/۷\left(\frac{۱۲}{۲۰}\right) = ۴۰/۰N$$

$$w_x = \left(\frac{۱۰۰}{۲۰}\right) \times \left(\frac{۱۲}{۲۰}\right) = ۳\frac{N}{m}$$

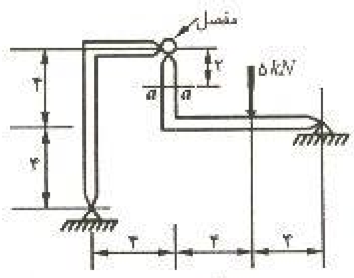
$$w_y = \left(\frac{۱۰۰}{۲۰}\right) \times \left(\frac{۱۶}{۲۰}\right) = ۴\frac{N}{m}$$



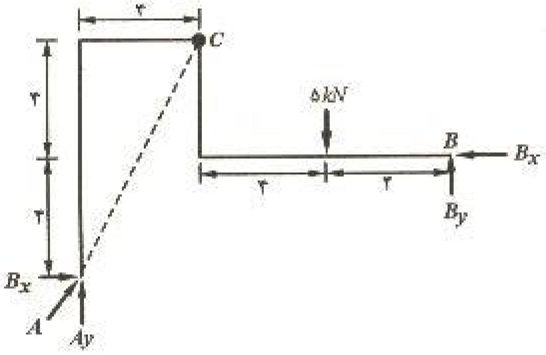
$$\nearrow^{+} \sum F_x = ۰ : -P - w_x(۱۰) - R_۱ = ۰ \Rightarrow P = -۸۳/۴N$$

$$\nwarrow^{+} \sum F_y = ۰ : V + R_۲ - w_y(۱۰) = ۰ \Rightarrow V = ۰$$

$$+\circlearrowleft \sum M_o = ۰ : -M - w_y(۱۰)(۵) + R_۲(۱۰) = ۰ \Rightarrow M = ۲۰۰ N.m$$

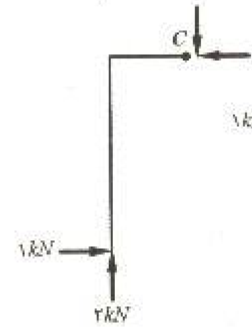


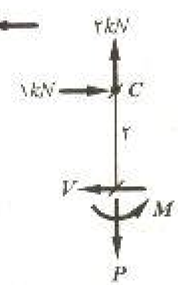
مسأله ۲-۸



چون عضو Ac یک عضو دو نیرویی می‌باشد امتداد نیروی A باید از نقطه C بگذرد با توجه به این نکته از هندسه شکل:

$$A_x = \frac{A_y}{۲}$$





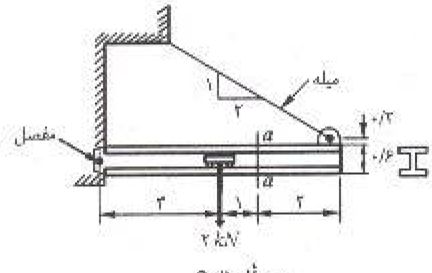
$$+\circlearrowleft \sum M_B = ۰ : -A_y\,(۱۲) + \frac{A_y}{۲}(۴) + ۵(۴) = ۰$$

$$\Rightarrow A_y = ۲kN \text{ و } A_x = \frac{A_y}{۲} = ۱\,kN$$

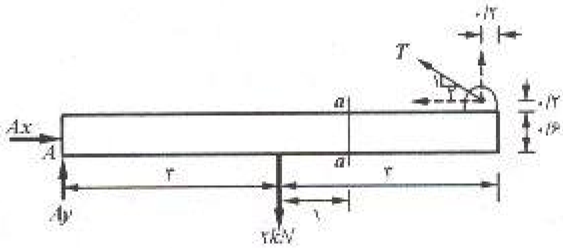
$P = ۲kN$

$V = ۱kN$

$M = ۱ \times ۲ = ۲\,kN.m$

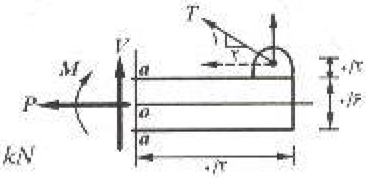


مسأله ۲-۹



$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰: \left(T \times \frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)(۰/۳ + ۰/۲) + \left(T \times \frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)(۶ - ۰/۲) - ۲(۳) = ۰$$

$$T = ۱/۹۷\, kN \nwarrow$$

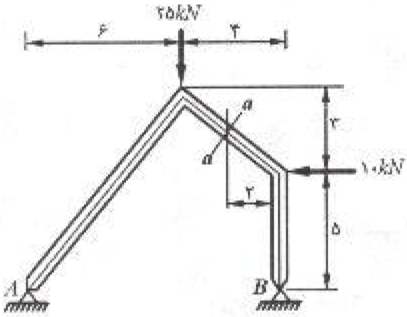


$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : -P - \left(۱/۹۷ \times \frac{۲}{\sqrt{۵}}\right) = ۰ \Rightarrow P = -۱/۷۶\, kN$$

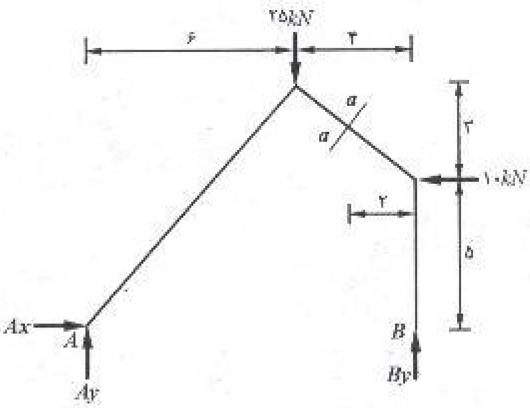
$$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ : V + \left(۱/۹۷ \times \frac{۱}{\sqrt{۵}}\right) = ۰ \Rightarrow V = -۰/۸۸\, kN$$

$$+\circlearrowleft \sum M_o = ۰ : -M + \left(۱/۹۷ \times \frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)(۰/۳ + ۰/۲) + \left(۱/۹۷ \times \frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)(۲ - ۰/۲) = ۰$$

$$\Rightarrow M = ۲/۴۶\, kN.m$$



مسأله ۲-۱۰



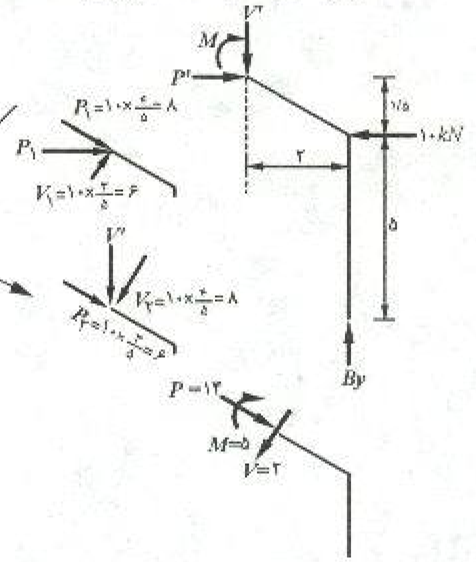
$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ : B_y\,(۱۰) + ۱۰(۵) - ۲۵(۶) = ۰ \Rightarrow B_y = ۱۰\, kN \uparrow$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : P' - ۱۰ = ۰ \Rightarrow P' = ۱۰\, kN \longrightarrow$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ : B_y - V' = ۰ \Rightarrow V' = ۱۰\, kN \downarrow$$

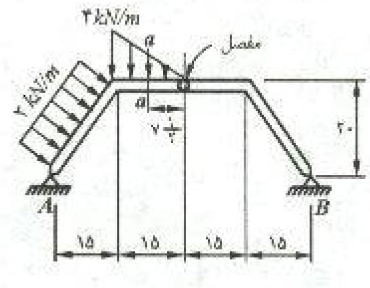
$\therefore\ V = V_{۲} - V_{۱} = ۸ - ۶ = ۲ \Rightarrow V = ۲\,kN$

$P = P_{۱} + P_{۲} = ۸ + ۶ = ۱۴ \Rightarrow P = ۱۴\,kN$

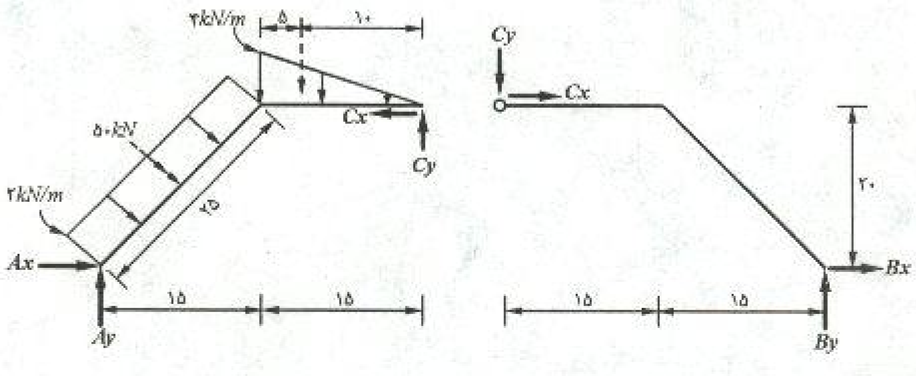


$+\circlearrowleft \sum M_o = ۰ : -M + B_y\,(۲) - ۱۰(۱/۵) = ۰$

$\Rightarrow M = ۵\,kN.m \uparrow \therefore$



مسئله ۲-۱۱

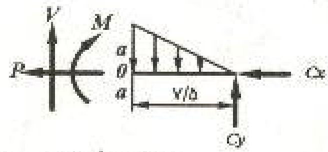


توضیح: بجای بارهای گستردهٔ یکنواخت و مثلثی، از اثر معادل آنها بصورت نیروی متمرکز استفاده می‌شود.

$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ : C_x\,(۲۰) + C_y(۳۰) - \left(\frac{۴\times ۱۵}{۲}\right)(۱۵+۵) - (۲\times ۲۵)\left(\frac{۲۵}{۲}\right) = ۰$$

$$\left.\begin{array}{ll} +\circlearrowleft \sum M_A = ۰ & \Rightarrow \\ +\circlearrowleft \sum M_B = ۰ & \Rightarrow \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} C_x\,(۲۰) + C_y(۳۰) = ۱۲۲۵ \\ -C_x\,(۲۰) + C_y(۳۰) = ۰ \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} C_x = ۳۰/۶۳ \\ C_y = ۲۰/۴۲ \end{array}$$

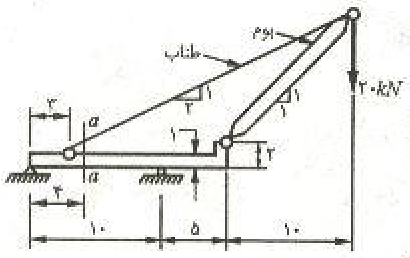
ترسیمهٔ آزاد مقطع $(a-a)$
(روی قطعه سمت چپ)



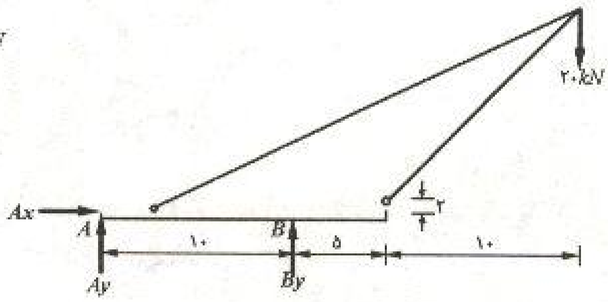
ترسیمهٔ آزاد مقطع $(a-a)$: $\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : - P - C_x = ۰ \Rightarrow P = -۳۰/۶۳ kN$

$$\uparrow^+ \sum F_y = ۰ : V + C_y - \left(\frac{۲ \times ۷/۵}{۲}\right) = ۰ \Rightarrow V = -۱۲/۹۲ kN$$

$$+\circlearrowleft \sum M_o = ۰ : -M + C_y\,(۷/۵) - \left(\frac{۲ \times ۷/۵}{۲}\right) \times \left(\frac{۷/۵}{۳}\right) = ۰ \Rightarrow M = ۱۳۴/۴\, kN.m$$



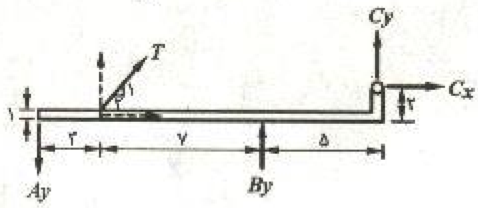
مسئله ۱۲-۲



$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ : B_y\,(۱۰) - ۲۰(۲۵) = ۰ \Rightarrow B_y = ۵۰ kN \uparrow$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$$

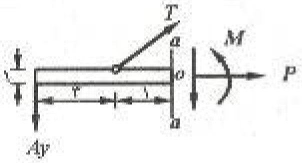
$$\uparrow^+ \sum F_y = ۰ : A_y + B_y - ۲۰ = ۰ \Rightarrow A_y = -۳۰ kN \uparrow \Rightarrow A_y = ۳۰ kN \downarrow$$



$$+\circlearrowleft \sum M_c = ۰ : A_y\,(۱۵) - B_y(۵) + \left(T \times \frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)(۱) - \left(T \times \frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)(۱۲) = ۰$$

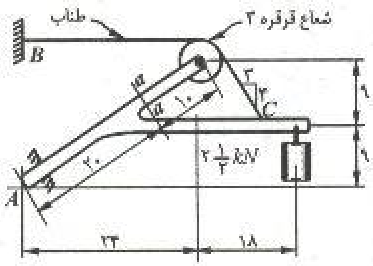
$$\Rightarrow T = ۲۰\sqrt{۵} \nearrow kN$$

ترسیمهٔ آزاد مقطع $a-a$: $\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : P + T\left(\frac{۲}{\sqrt{۵}}\right) = ۰ \Rightarrow P = -۴۰\, kN$

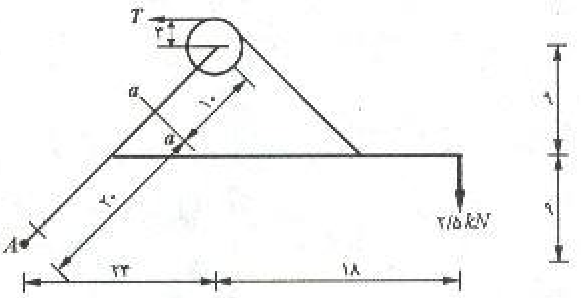


$$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ : -A_y - V + T\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right) = ۰ \Rightarrow V = -۱۰\,kN$$

$$+\circlearrowleft \sum M_o = ۰ : M + A_y\,(۴) - \left(T \times \frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)(۱) - \left(T \times \frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)(۰/۵) = ۰ \Rightarrow M = -۸۰\,kN.m$$



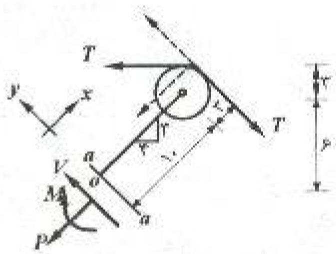
مسأله ۲-۱۳



$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ : T\,(۱۸ + ۳) - ۲/۵(۲۴ + ۱۸) = ۰ \Rightarrow T = ۵\,kN \longleftarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_o = ۰ : -M - T(۱۰ + ۳) + T\,(۶ + ۳) = ۰$$

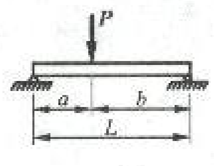
$$M = -۲۰\,kN.m$$



$$\nearrow^{+} \sum F_x = ۰ : -P - T\left(\frac{۴}{۵}\right) = ۰ \Rightarrow P = -۴\,kN$$

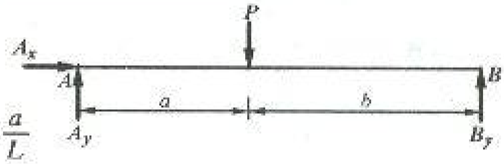
$$\nwarrow^{+} \sum F_y = ۰ : V + T\left(\frac{۳}{۵}\right) - T = ۰ \Rightarrow V = ۲\,kN$$

۲-۱۴ تا ۲-۱۹. برای تیرهای نشان داده شده، ترسیمهٔ تغییرات نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی را با استفاده از روش مقطع زدن رسم نمایید.

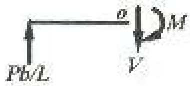


مسأله ۲-۱۴

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$$



$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 : -Pa + B_y L = 0 \Rightarrow B_y = P\frac{a}{L}$$



$0 \leq x \leq a$

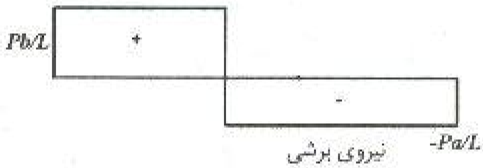
$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 : Pb - A_y L = 0 \Rightarrow A_y = P\frac{b}{L}$$

$$0 \leqslant x < a : \ \uparrow^{+} \sum F_y = 0 \Rightarrow V = \frac{Pb}{L}$$

$0 \leq x \leq L$

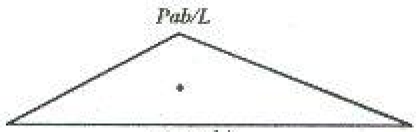
$$+\circlearrowleft \sum M_o = 0 \Rightarrow M = P\frac{b}{L}(x)$$

$$a \leqslant x \leqslant L \ \uparrow^{+} \sum F_y = 0 \Rightarrow V = -\frac{Pa}{L}$$



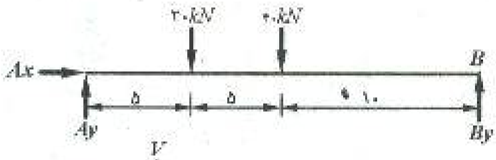
نیروی برشی

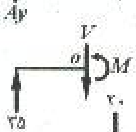
$$+\circlearrowleft \sum M_{o'} = 0 \Rightarrow M = P\frac{a}{L}(L - x)$$



لنگر خمشی

مسئله ۲-۱۵





$0 \leq x \leq 5$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$5 \leq x \leq 10$

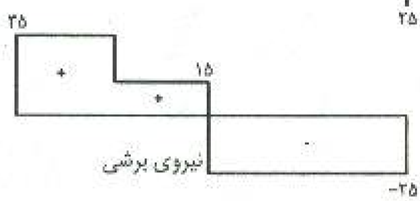
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 : B_y(20) - 20(5) - 40(10) = 0$$

$10 \leq x \leq 20$

$$\Rightarrow B_y = 25\,kN \uparrow$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 : A_y + B_y - 20 - 40 = 0$$

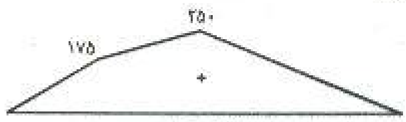
$$\Rightarrow A_y = 35\,kN \uparrow$$



نیروی برشی

$$0 \leqslant x \leqslant 5 \Rightarrow \uparrow^{+} \sum F_y = 0 \Rightarrow V = 35\,kN$$

$$+\circlearrowleft \sum M_o = 0 : M = 35x \ ; (x = 5 \Rightarrow M = 175)$$



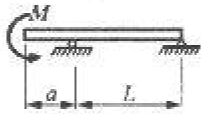
لنگر خمشی

$$5 < x \leqslant 10 \Rightarrow \uparrow^{+} \sum F_y = 0 \Rightarrow V = 15\,kN$$

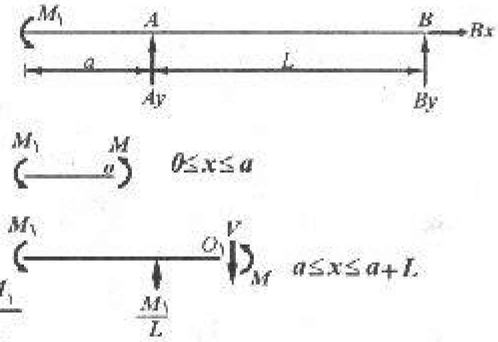
$$+\circlearrowleft \sum M_{o'} = ۰ : M = ۳۵x - ۲۰(x - ۵) = ۱۵x + ۱۰۰ \text{ ؛ } (x = ۱۰ \Rightarrow M = ۲۵۰)$$

$$۱۰ < x \leqslant ۲۰ \Rightarrow \uparrow^{+} \sum F_y = ۰ \Rightarrow V = -۲۵\,kN$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{o'} = ۰ \Rightarrow M = ۲۵(۲۰ - x)$$



مسأله ۲-۱۶



$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow B_x = ۰$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ : M_1 + B_y L = ۰ \Rightarrow B_y = \frac{-M_1}{L}$$

نیروی برشی

$$+\circlearrowleft \sum M_B = ۰ : M_1 - A_y L = ۰ \Rightarrow A_y = \frac{M_1}{L}$$

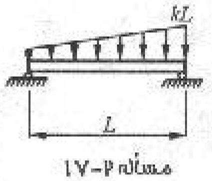
$$۰ \leqslant x \leqslant a \Rightarrow +\circlearrowleft \sum M_o = ۰ \Rightarrow M = -M_1$$

لنگر خمشی

$$a \leqslant x \leqslant a + L \Rightarrow \uparrow^{+} \sum F_y = ۰ \Rightarrow V = \frac{M_1}{L}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{o'} = ۰ : M = \frac{M_1}{L}(x - a) - M_1$$

$$\Rightarrow M = M_1\left(\frac{x-a}{L} - ۱\right)$$



مسأله ۲-۱۷

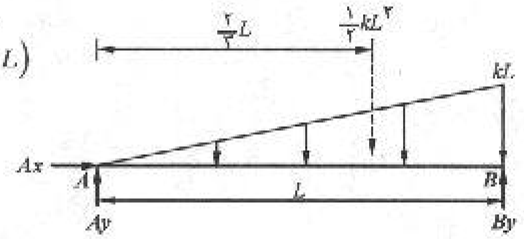
$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ : B_y L - \frac{۱}{۲} KL^۲\left(\frac{۲}{۳}L\right) = ۰ \Rightarrow B_y = \frac{KL^۲}{۳}$$

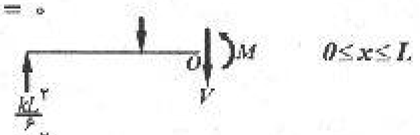
$$+\circlearrowleft \sum M_B = ۰ : -A_y L + \frac{۱}{۲} KL^۲\left(\frac{۱}{۳}L\right) = ۰ \Rightarrow A_y = \frac{KL^۲}{۶}$$

$$۰ \leqslant x \leqslant L \Rightarrow +\uparrow \sum F_y = ۰ : -V - \left(\frac{۱}{۲}Kx^{۲}\right) + \frac{KL^{۲}}{۶} = ۰$$

$$V = \frac{KL^{۲}}{۶} - \frac{Kx^{۲}}{۲} \Rightarrow \left(V = ۰ \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۳}}{۳}L\right)$$

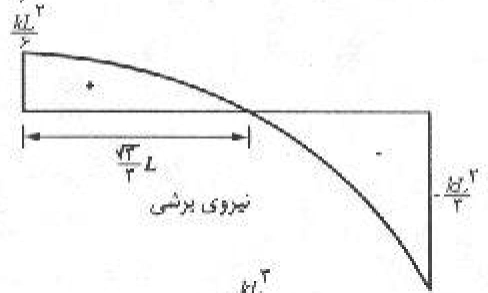


$$+\circlearrowleft \sum M_o = ۰ : M + \left(\frac{۱}{۲}Kx^{۲}\right)\left(\frac{۱}{۳}x\right) - \frac{KL^{۲}}{۶}x = ۰$$

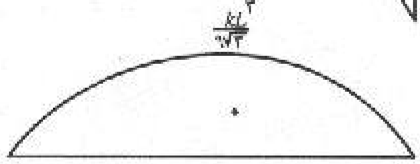


$$M = \frac{KL^{۲}}{۶}x - \frac{Kx^{۳}}{۶}$$

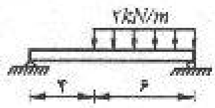
$$x = \frac{\sqrt{۳}}{۳}L \Rightarrow M_{max} = \frac{KL^{۲}}{۹\sqrt{۳}}$$



نیروی برشی



لنگر خمشی



مسأله ۶-۱۸

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ : B_y(۱۰) - (۲\times۶)(۴+۳) = ۰ \Rightarrow B_y = ۸/۴kN \uparrow$$

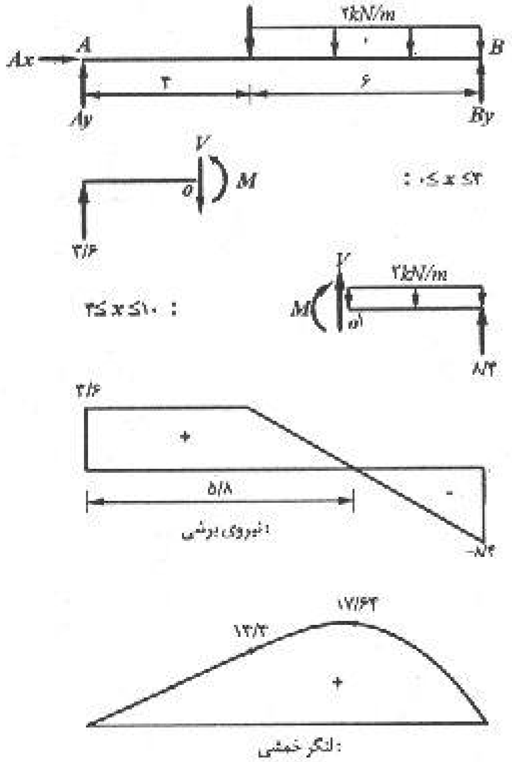
$$+\uparrow \sum F_y = ۰ : A_y + B_y - (۲\times۶) = ۰ \Rightarrow A_y = ۳/۶\,kN \uparrow$$

$$۰ \leqslant x \leqslant ۴ : +\uparrow \sum F_y = ۰ : V = ۳/۶\,kN \quad +\circlearrowleft \sum M_o = ۰ \Rightarrow M = ۳/۶x$$

$$۴ \leqslant x \leqslant ۱۰ : +\uparrow \sum F_y = ۰ : V + ۸/۴ - ۲(۱۰-x) = ۰ \Rightarrow V = ۱۱/۶ - ۲x$$

$$+\circlearrowleft \sum + M_{o'} = ۰ : M + ۲\times\frac{(۱۰-x)^{۲}}{۲} - ۸/۴(۱۰-x) = ۰ \quad M = -x^{۲} + ۱۱/۶x - ۱۶$$

$V = ۰ \Rightarrow x = ۵/۸ \Rightarrow M_{max} = -(۵/۸)^۲ + ۱۱/۶(۵/۸) - ۱۶ = ۱۷/۶۴$



مسأله ۲-۱۹

$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ : B_y L - W\left(L + \frac{a}{۲}\right) = ۰ \Rightarrow B_y = W\left(۱ + \frac{a}{۲L}\right)$

$+\circlearrowleft \sum M_B = ۰ : -A_y L - W\frac{a}{۲} = ۰ \Rightarrow A_y = -W\frac{a}{۲L}$

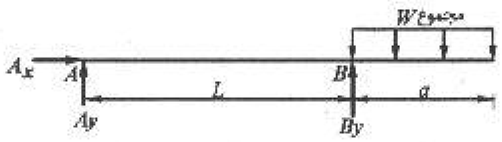
$۰ \leqslant x \leqslant L : \uparrow^+ \sum F_y = ۰ \Rightarrow V = -W\frac{a}{۲L}$

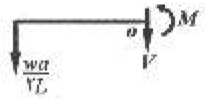
$+\circlearrowleft \sum M_o = ۰ \Rightarrow M = -W\frac{a}{۲L}x$

$L \leqslant x \leqslant L + a : \uparrow^+ \sum F_y = ۰ \Rightarrow V = \frac{W}{a}(L + a - x)$

$+\circlearrowleft \sum M_{o'} = ۰ : M = -\frac{W}{a}\frac{(L + a - x)^۲}{۲}$

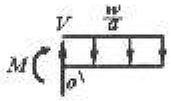
$$x = L \Rightarrow M_{max} = -\frac{Wa}{۲}$$

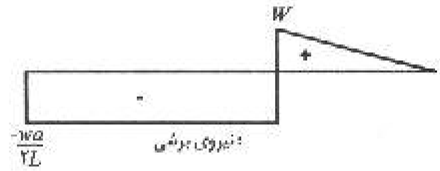




$: ۰ \leq x \leq L$

$: L < x \leq L+a$

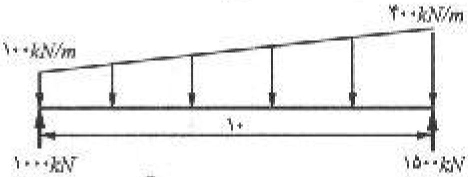




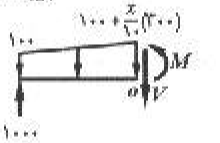
۲-۲۰. مطلوب است رسم ترسیمهٔ تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر مسأله ۲-۳ با استفاده از روش مقطع زدن. از قرارداد علامت تیرها استفاده نمایید.

$$۰ \leqslant x \leqslant ۱۰ : \quad \uparrow^{+} \sum F_y = ۰ : ۱۰۰۰ - V - \frac{۱}{۲}x\left[۱۰۰ + ۱۰۰ + \frac{x}{۱۰}(۳۰۰)\right] = ۰$$

$$V = ۱۰۰۰ - \frac{۱}{۲}x(۲۰۰ + ۳۰x)$$



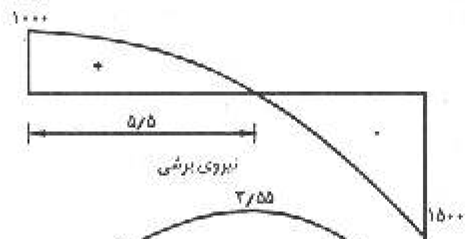
$$\Rightarrow V = -۱۵x^۲ - ۱۰۰x + ۱۰۰۰$$



$۰ \leq x \leq ۱۰$

$$+\circlearrowleft \sum M_o = ۰ \Rightarrow M - ۱۰۰۰x$$

$$+ \left[۱۰۰\frac{x^۲}{۲} + \left(۳۰\frac{x^۲}{۲}\right)\left(\frac{x}{۳}\right)\right] = ۰$$



$$M = -۵x^۳ - ۵۰x^۲ + ۱۰۰۰x$$

$$V = ۰ \Rightarrow x = ۵/۵$$

$$\Rightarrow M_{max} = ۳۱۵۵ kN.m$$

۲-۲۱. خواسته‌های مسأله ۲-۲۰ را برای تیر مسأله شماره ۲-۴ انجام دهید.

$۰ \leqslant x \leqslant ۶: \quad +\uparrow \sum F_y = ۰ : -V - ۴x + ۱۸/۳۳ = ۰ \Rightarrow V = ۱۸/۳۳ - ۴x$

$+\circlearrowleft \sum M_o = ۰ : M + \frac{۴x^۲}{۲} - ۱۸/۳۳x = ۰ \Rightarrow M = -۲x^۲ + ۱۸/۳۳x$

$V = ۰ \Rightarrow x = ۴/۶ \Rightarrow M_{max} = ۴۲$

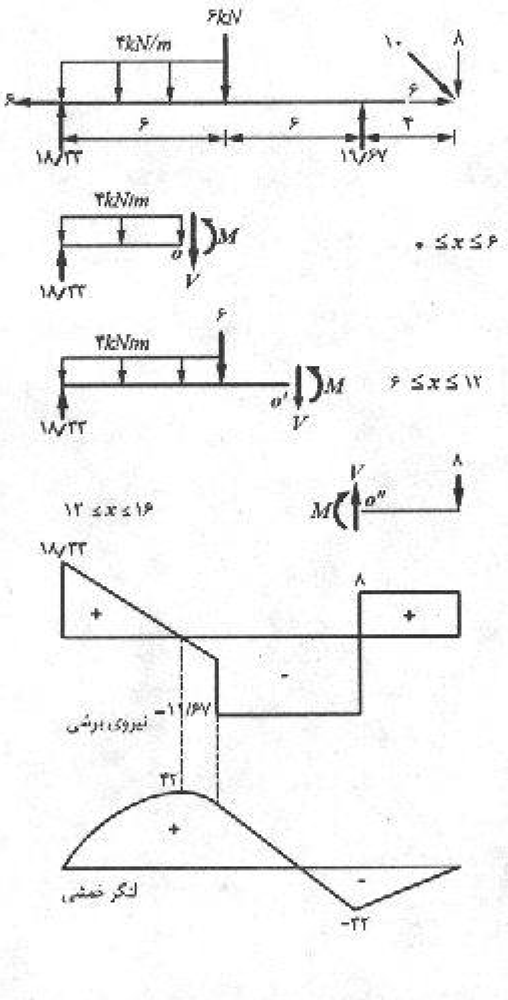
$۶ \leqslant x \leqslant ۱۲: \quad +\uparrow \sum F_y = ۰ : -V - ۶ - (۴)(۶) + ۱۸/۳۳ = ۰ \Rightarrow V = -۱۱/۶۷$

$+\circlearrowleft \sum M_{o'} = ۰ : M + ۶(x - ۶) + (۴)(۶)(x - ۳) - ۱۸/۳۳x = ۰$

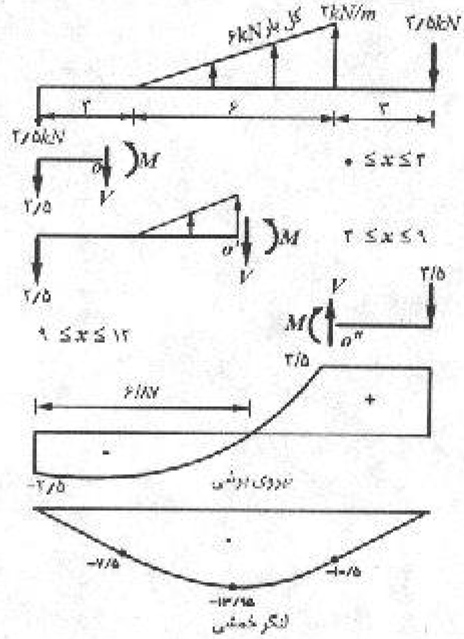
$M = -۱۱/۶۷x + ۱۰۸ \; (x = ۱۲ \Rightarrow M_{۱۲} = -۳۲ \, kN.m)$

$۱۲ \leqslant x \leqslant ۱۶: \quad +\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow V = ۸kN$

$+\circlearrowleft \sum M_{o''} = ۰ : M = -۸(۱۶ - x) \Rightarrow M = ۸x - ۱۲۸$



۲-۲۲. خواسته‌های مسأله ۲-۲۰ را برای تیر مسأله شمارهٔ ۲-۵ انجام دهید.



$0 \leqslant x \leqslant 3:\ +\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V = -2/5\,kN$

$+\circlearrowleft \sum M_o = 0 \Rightarrow M = -2/5x$

$3 \leqslant x \leqslant 9:\ +\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -V - 2/5 + \left[\frac{2(x-3)}{6} \times \frac{(x-3)}{2}\right] = 0$

$V = \frac{1}{6}x^2 - x - 1$

$+\circlearrowleft \sum M_{o'} = 0 \Rightarrow M + 2/5x - \left[\frac{2(x-3)}{6} \times \frac{(x-3)}{2} \times \frac{(x-3)}{3}\right] = 0$

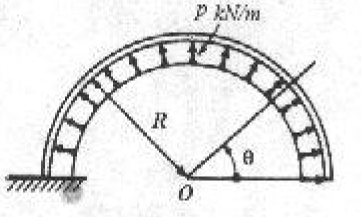
$M = \frac{(x-3)^3}{18} - 2/5x$

$V = 0 \Rightarrow x = 6/87m \Rightarrow M_{max} = \frac{(6/87-3)^3}{18} - 2/5(6/87) = -13/95$

$9 \leqslant x \leqslant 12:\ +\uparrow \sum F_y = 0 : V = 3/5\,kN$

$+\circlearrowleft \sum M_{o''} = 0 : -M - 3/5(12 - x) = 0 \Rightarrow M = 3/5x - 42$

۲-۲۳ و ۲-۲۴. مطلوب است رسم تغییرات نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر طره‌ای نیم‌دایره‌ای که مطابق شکل تحت فشار داخلی P قرار دارد با استفاده از روش مقطع زدن. برای حل مسأله از مختصات قطبی استفاده نمایید. یعنی مقادیر P، V و M را برحسب θ تعیین کرده و رسم نمایید (مطالعهٔ مثال ۲ - ۸ مفید خواهد بود.) از قرارداد علامت تیرها استفاده نمایید.



مسأله ۲-۲۴

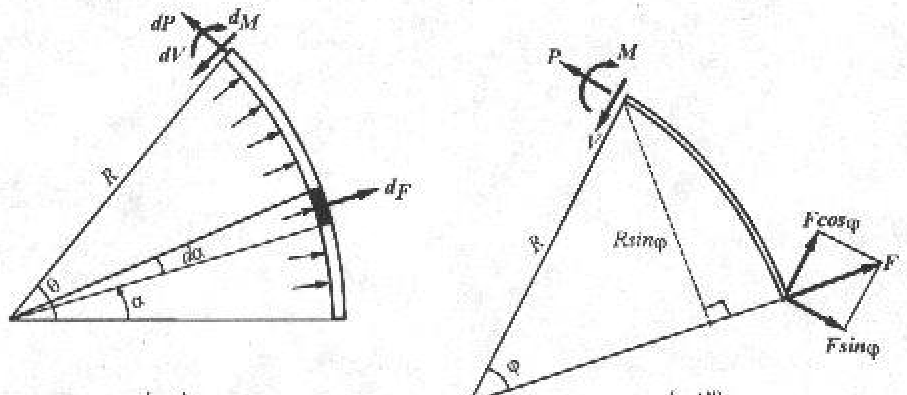
کمانی را در نظر بگیرید که روی نقطه‌ای از آن نیروی F وارد می‌شود. با توجه به شکل الف در محلی

روی کمان که نسبت به محل اثر نیرو با زاویه مرکزی φ مشخص می‌شود داریم:

$P = F\ Sin\ \varphi$

$V = F\ Cos\ \varphi$

$M = FR\ Sin\ \varphi$



(ب) (الف)

جزء نیروی وارد بر المان در شکل (ب):

$dF = pds = pRd\alpha$

با بکارگیری روابط (۱) برای المان:

$$dp = dF\ Sin\ (\theta - \alpha) = pRd\alpha\ Sin\ (\theta - \alpha)$$

$$dV = dF\ Cos\ (\theta - \alpha) = pRd\alpha\ Cos\ (\theta - \alpha)$$

$$dM = dFR\ Sin\ (\theta - \alpha) = pR^2 d\alpha\ Sin\ (\theta - \alpha)$$

$$P = \int_0^{\theta} dP = \int_0^{\theta} pR\ Sin(\theta - \alpha)\ d\alpha = pRCos(\theta - \alpha)\Big|_0^{\theta} \Rightarrow P = pR\ (1 - Cos\,\theta)$$

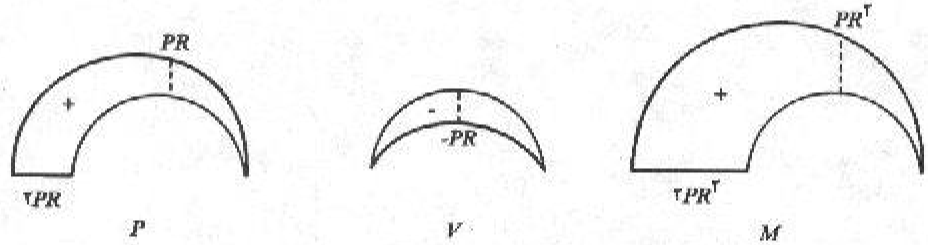
$$\theta = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ و } \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P = pR \text{ و } \theta = \pi \Rightarrow P = 2pR$$

$$V = \int_0^{\theta} dV = \int_0^{\theta} pR\ Cos(\theta - \alpha)\ d\alpha = -pRSin(\theta - \alpha)\Big|_0^{\theta} \Rightarrow V = -pRSin\,\theta$$

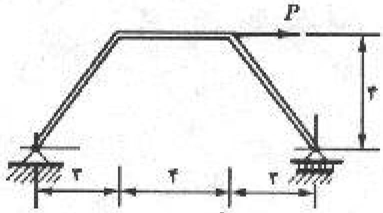
$$\theta = 0 \Rightarrow V = 0 \text{ و } \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow V = -pR \text{ و } \theta = \pi \Rightarrow V = 0$$

$$M = \int_0^{\theta} dM = \int_0^{\theta} pR^2\ Sin(\theta - \alpha)\ d\alpha = pR^2 Cos(\theta - \alpha)\Big|_0^{\theta} \Rightarrow M = pR^2\ (1 - Cos\,\theta)$$

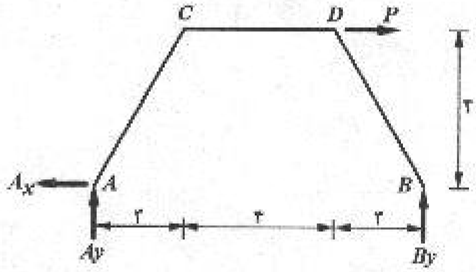
$$\theta = 0 \Rightarrow M = 0 \text{ و } \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow M = pR^2 \text{ و } \theta = \pi \Rightarrow M = 2pR^2$$

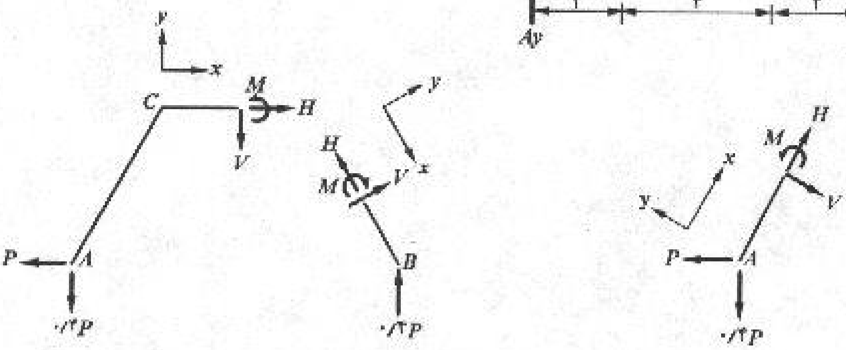


۲-۲۵. مطلوب است رسم تغییرات نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی برای قاب نشان داده شده در شکل با استفاده از روش مقطع زدن. از قرارداد علامت تیرها استفاده نمایید و ترسیمه‌های مثبت را در طرف فشاری قاب نشان دهید.



مسأله ۲-۲۵





$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : -A_x + P = ۰ \Rightarrow A_x = P \leftarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ : B_y(۱۰) - P\,(۴) = ۰ \Rightarrow B_y = ۰/۴P \uparrow$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ : A_y + B_y = ۰ \Rightarrow A_y = -۰/۴P \uparrow$$

$$A_y = ۰/۴P \downarrow$$

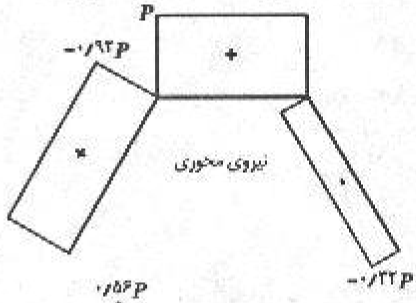
قطعهٔ AC:

$$\nearrow^{+} \sum F_x = ۰ : H - (۰/۴P)\left(\frac{۴}{۵}\right) - P\left(\frac{۳}{۵}\right) = ۰ \Rightarrow H = ۰/۹۲P \quad \nearrow$$

$$\searrow^{+} \sum F_y = ۰ : -V - (۰/۴P)\left(\frac{۳}{۵}\right) + P\left(\frac{۴}{۵}\right) = ۰ \Rightarrow V = ۰/۵۶P \quad \searrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ : M - V_x = ۰ \Rightarrow M = ۰/۵۶Px \quad (۰ \leqslant x \leqslant ۵)$$

قطعهٔ ACD:



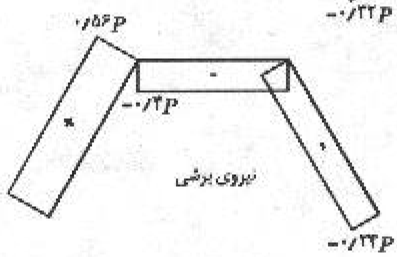
$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : H - P = ۰ \Rightarrow H = P \longrightarrow$$

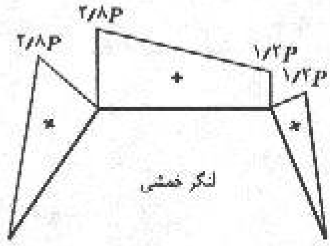
$$+\uparrow \sum F_y = ۰ : -V - ۰/۴P = ۰ \Rightarrow V = -۰/۴P \downarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \Rightarrow M - H(۴) - V(۳ + x) = ۰$$

$$M - P(۴) - (-۰/۴P)(۳ + x) = ۰$$

$$M = ۲/۸P - ۰/۴Px \quad (۰ \leqslant x \leqslant ۴)$$





قطعهٔ BD:

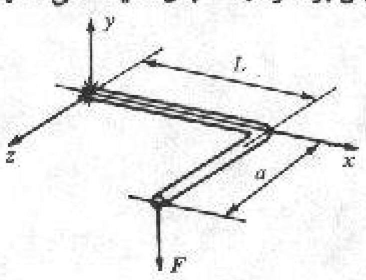
$$\sum F_x = ۰ : -H - (۰/۴P)\frac{۴}{(۵)} = ۰ \Rightarrow H = -۰/۳۲P$$

$$\sum F_y = ۰ : V + ۰/۴P \frac{۳}{(۵)} = ۰ \Rightarrow V = -۰/۲۴P$$

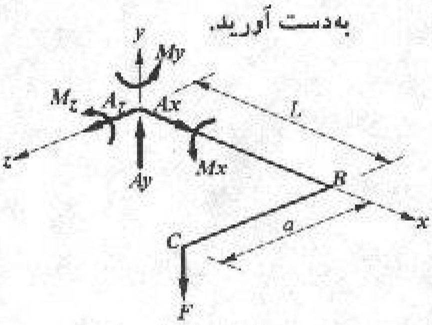
$$+\circlearrowleft \sum M_B = ۰ : -M - V(۵ - x) = ۰ \Rightarrow -M - (-۰/۲۴P)(۵ - x) = ۰$$

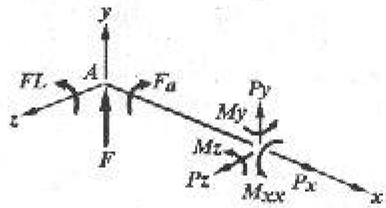
$$\Rightarrow M = ۰/۲۴P(۵ - x) \quad (۰ \leqslant x \leqslant ۵)$$

۲-۲۶. میلهٔ خم شده‌ای همانند شکل مفروض است. ابتدا با صرف‌نظر کردن از وزن میله، رابطهٔ تغییرات نیروی برشی V و لنگر خمشی M و لنگر پیچشی T را با استفاده از روش مقطع زدن پیدا نمایید و سپس آنها را رسم کنید. از قرارداد علامت منطبق بر محور مختصات راست استفاده نمایید. سپس با در نظر گرفتن وزن میله به مقدار P کیلونیوتن بر متر، واکنشهای تکیه‌گاهی انتهای گیردار را به‌دست آورید.



مسأله ۲-۲۶





$$\nwarrow^{+} \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

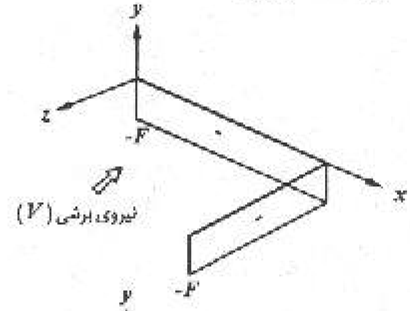
$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 : A_y - F = 0 \Rightarrow A_y = F \uparrow$$

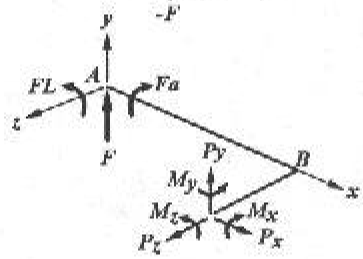
$$\swarrow^{+} \sum F_z = 0 \Rightarrow A_z = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{x_A} = 0 : M_{x_A} + Fa = 0 \Rightarrow M_{x_A} = -Fa \downarrow$$

$$\circlearrowright^{+} \sum M_{y_A} = 0 \Rightarrow M_{y_A} = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_z = 0 : M_{z_A} - FL = 0 \Rightarrow M_{z_A} = FL \uparrow$$





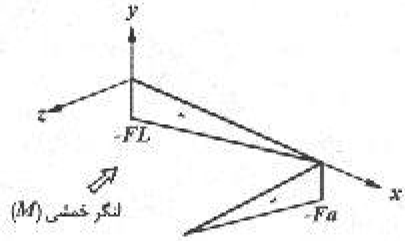
قطعهٔ AB:

$$\nwarrow^{+} \sum F_x = 0 \Rightarrow P_x = 0$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 : P_y + F = 0 \Rightarrow P_y = -F \uparrow = V$$

$$\swarrow^{+} \sum F_z = 0 \Rightarrow P_z = 0$$

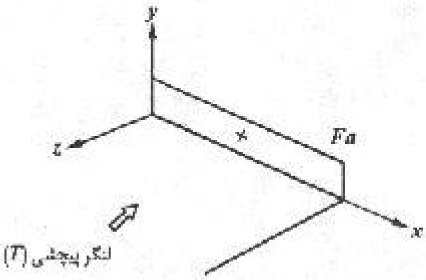
$$+\circlearrowleft \sum M_x = 0 : M_{xx} - Fa = 0 \Rightarrow M_{xx} = Fa \downarrow = T$$



$$\circlearrowright^{+} \sum M_y = 0 \Rightarrow M_{yy} = 0$$

$$\nwarrow^{+} \sum M_z = 0 : M_{zz} + FL - Fx = 0 \Rightarrow$$

$$M_{zz} = F\,(x - L) \uparrow = M \qquad 0 \leqslant x \leqslant L$$



قطعهٔ BC:

$$\nwarrow^{+} \sum F_x = 0 \Rightarrow P_x = 0$$

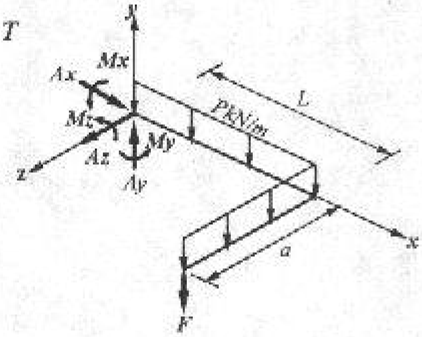
$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 : P_y + F = 0 \Rightarrow P_y = -F \uparrow = V$$

$$\swarrow^{+} \sum F_z = 0 \Rightarrow P_z = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_x = 0 : -M_x - Fa + Fz = 0 \Rightarrow M_{xx} = F(z-a) \downarrow = M \qquad 0 \leqslant z \leqslant a$$

$$+\circlearrowleft \sum M_y = 0 \Rightarrow M_{yy} = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_z = 0 : M_z + FL - FL = 0 \Rightarrow M_{zz} = 0 = T$$



$$\searrow^{+} \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 : A_y - F - PL - Pa = 0 \Rightarrow$$

$$A_y = F + P(L+a) \uparrow$$

$$\swarrow_{+} \sum F_z = 0 \Rightarrow A_z = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{x_A} = 0 : M_{z_A} + Fa + (Pa)\left(\frac{a}{2}\right) = 0 \Rightarrow M_{x_A} = -Fa - P\frac{a^2}{2} \downarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{y_A} = 0 \Rightarrow M_{y_A} = 0$$

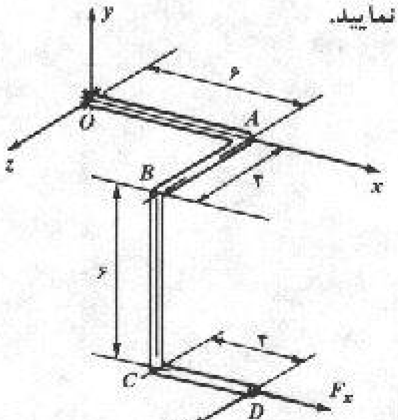
$$+\circlearrowleft \sum M_{z_A} = 0 : M_{z_A} - FL - (Pa)(L) - (PL)\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow M_{zA} = FL + PaL + \frac{PL^2}{2} \quad \circlearrowleft$$

۲-۲۷. لوله‌ای مطابق شکل که دارای سه زانوی ۹۰ درجه می‌باشد، در نظر بگیرید.

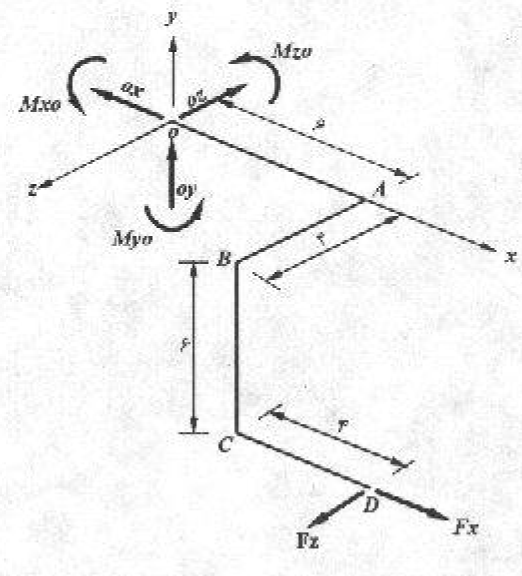
(الف) رابطهٔ کلی نیروهای داخلی P_x، P_y، P_z و M_x و M_y و M_z را در هر یک از قسمتهای آن به دست آورید. نیروی F_x را مساوی ۱۰۰ و P_Z را مساوی ۵۰ کیلونیوتن در نظر بگیرید و از قرارداد علامت منطبق بر دستگاه مختصات راست استفاده نمایید.

(ب) نتایج قسمت الف را رسم نمایید.

(پ) اگر علاوه بر نیروهای وارده F_x و F_Z، وزن لوله به میزان ۱۰ کیلونیوتن بر متر در نظر گرفته شود، واکنشهای تکیه‌گاهی تکیه‌گاه گیردار O را تعیین نمایید.



مسأله ۲-۲۷



$$\nwarrow^{+} \sum F_x = ۰ : -O_x + F_x = ۰ \Rightarrow O_x = F_x = ۱۰۰\, kN$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ \Rightarrow O_y = ۰$$

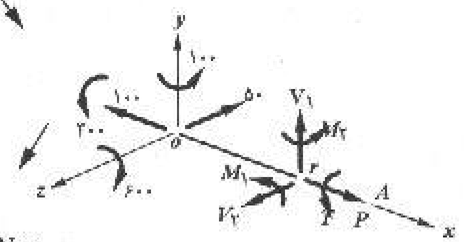
$$\swarrow^{+} \sum F_z = ۰ : -O_z + F_z = ۰ \Rightarrow O_z = F_z = ۵۰\, kN$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{x_o} = ۰ : M_{x_o} - F_z(۶) = ۰ \Rightarrow M_{x_o} = ۶F_z = ۳۰۰\, kN.m$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{y_o} = ۰ : M_{y_o} + F_x(۴) - F_z(۱۰) = ۰ \Rightarrow M_{y_o} = ۱۰۰\, kN.m$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{z_o} = ۰ : M_{z_o} + F_x(۶) = ۰ \Rightarrow M_{z_o} = -۶F_x = -۶۰۰\, kN.m$$

قطعهٔ OA:



$$\searrow^{+} \sum F_x = ۰ : P - ۱۰۰ = ۰ \Rightarrow P = ۱۰۰\, kN$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ \Rightarrow \qquad V_1 = ۰$$

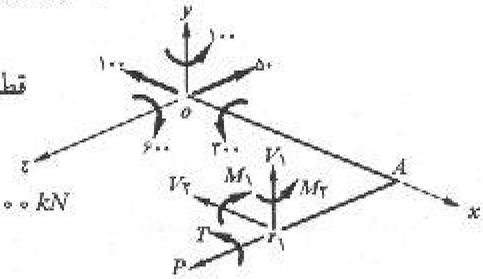
$$\swarrow^{+} \sum F_z = ۰ : V_2 - ۵۰ = ۰ \Rightarrow V_2 = ۵۰\, kN$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{x_r} = ۰ : T + ۳۰۰ = ۰ \Rightarrow T = -۳۰۰\, kN.m$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{y_r} = ۰ : M_2 + ۱۰۰ - ۵۰x = ۰ \Rightarrow M_2 = ۵۰x - ۱۰۰ \;\; ; \quad ۰ \leqslant x \leqslant ۶$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{z_r} = ۰ : M_1 - ۶۰۰ = ۰ \Rightarrow M_1 = ۶۰۰\, kN.m$$

قطعهٔ AB:



$$\nwarrow^{+} \sum F_x = ۰ : -V_2 - ۱۰۰ = ۰ \Rightarrow V_2 = -۱۰۰\, kN$$

$$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ \Rightarrow \qquad V_1 = ۰$$

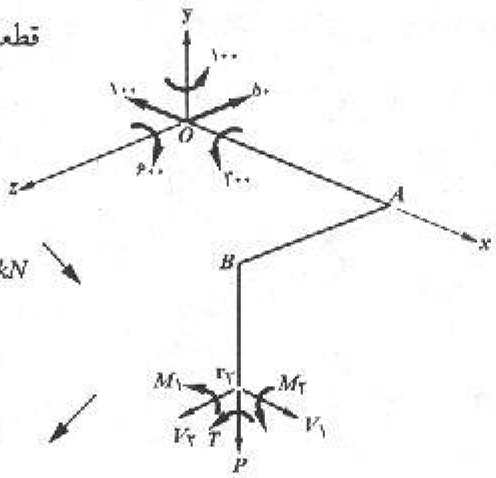
$$\swarrow^{+} \sum F_z = ۰ : P - ۵۰ = ۰ \Rightarrow P = ۵۰\, kN$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{x_{r1}} = ۰ : -M_1 + ۳۰۰ = ۰ \Rightarrow \quad M_1 = +۳۰۰\, kN.m$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{y_{r1}} = ۰ : M_2 + ۱۰۰ + ۱۰۰z - ۵۰(۶) = ۰ \Rightarrow M_2 = ۲۰۰ - ۱۰۰z \;\; ; \quad ۰ \leqslant z \leqslant ۴$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{z_{r1}} = ۰ : T - ۶۰۰ = ۰ \qquad T = ۶۰۰\, kN.m$$

قطعهٔ BC:



$$\sum F_x = 0 : V_1 - 100 = 0 \Rightarrow V_1 = 100\,kN$$

$$\sum F_y = 0 : -P = 0 \quad \Rightarrow P = 0$$

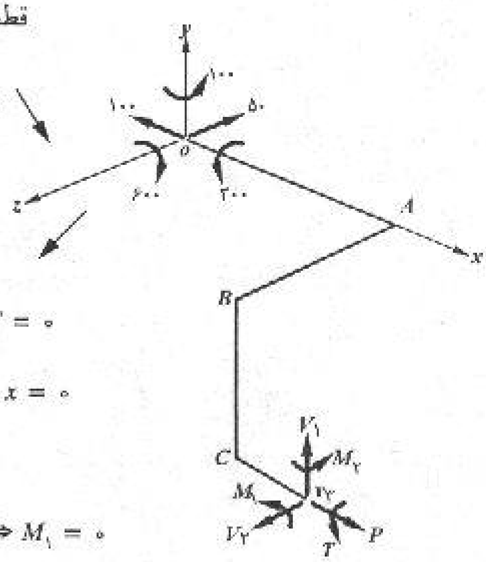
$$\sum F_z = 0 : V_2 - 50 = 0 \Rightarrow V_2 = 50\,kN$$

$$\sum M_{x_{r_1}} = 0 : M_2 + 300 - 50y = 0 \Rightarrow \quad M_2 = 50y - 300 \quad ; \quad 0 \leqslant y \leqslant 6$$

$$\sum M_{y_{r_1}} = 0 : -T + 100 - 50(6) + 100(4) = 0 \Rightarrow T = 200\,kN.m$$

$$\sum M_{z_{r_1}} = 0 : M_1 - 600 + 100y = 0 \Rightarrow M_1 = 600 - 100y \; ; \quad 0 \leqslant y \leqslant 6$$

قطعهٔ CD:



$$\sum F_x = 0 : P - 100 = 0 \Rightarrow P = 100\,kN$$

$$\sum F_y = 0 \qquad\qquad \Rightarrow V_1 = 0$$

$$\sum F_z = 0 : V_2 - 50 = 0 \Rightarrow V_2 = 50\,kN$$

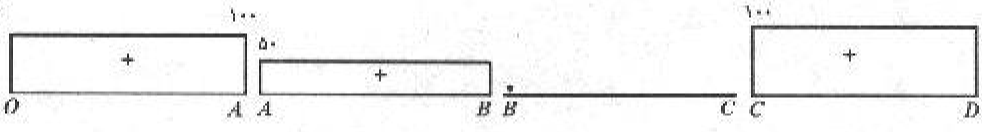
$$\sum M_{x_{r_2}} = 0 : T + 300 - 50(6) = 0 \Rightarrow T = 0$$

$$\sum M_{y_{r_2}} = 0 : M_2 + 100 + 100(4) - 50\,x = 0$$

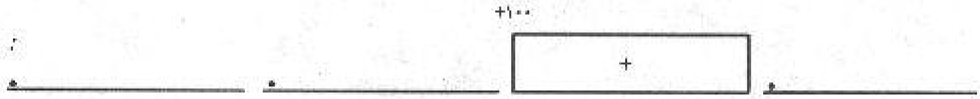
$$M_2 = 50x - 500 \quad ; \quad 6 \leqslant x \leqslant 10$$

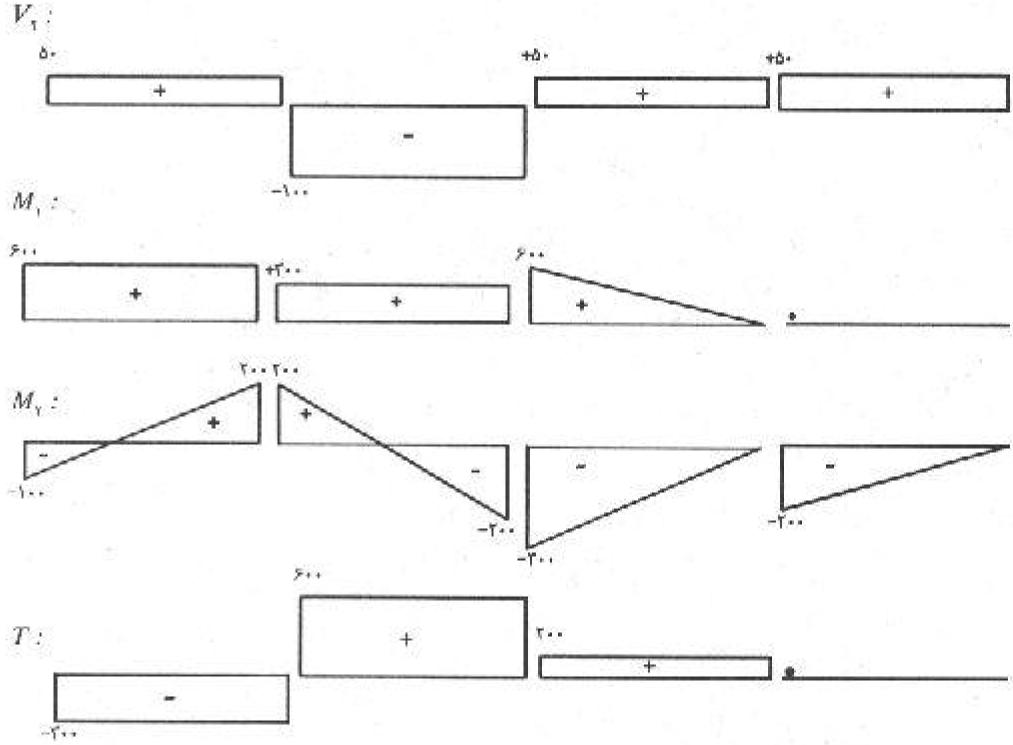
$$\sum M_{z_{r_2}} = 0 : M_1 - 600 + 100(6) = 0 \Rightarrow M_1 = 0$$

P:

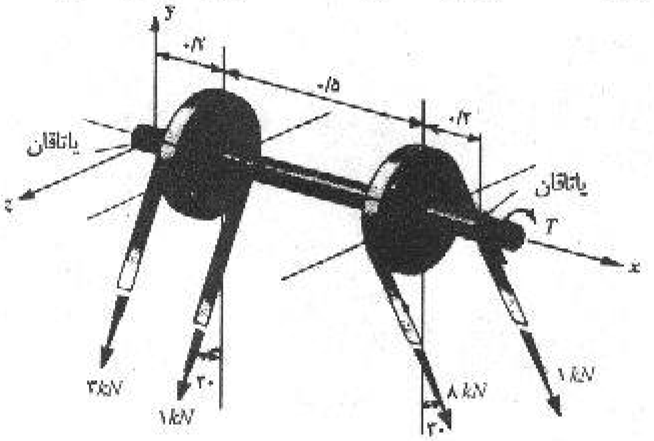


V_1:

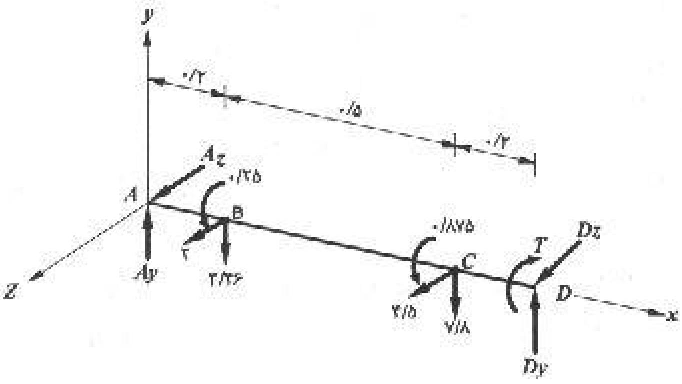




۲-۲۸. موتوری محوری را که دارای دو قرقرهٔ تسمه خور به قطر ۰/۲۵ متر می‌باشد، به دوران در می‌آورد. نیروی کششی تسمه‌ها معلوم هستند و مقادیر آنها در روی شکل نشان داده شده است. با استفاده از روش مقطع زدن، مطلوب است: (الف) رسم تغییرات لنگر خمشی ناشی از مؤلفهٔ قائم نیروهایی که بر روی محور تأثیر می‌کنند، به‌عبارت دیگر رسم تغییرات لنگر خمشی برای صفحهٔ xy (ب) رسم تغییرات لنگر خمشی ناشی از مؤلفهٔ افقی نیروهایی که بر محور تأثیر می‌کنند، به عبارت دیگر رسم تغییرات لنگر خمشی برای صفحهٔ xz (پ) رسم تغییرات لنگر پیچشی. از قرارداد علامت منطبق بر محورهای مختصات راست استفاده نمایید. (لازم به تذکر است که با استفاده از معادلهٔ $\sum M_X = 0$ و اطلاعات مربوط به کشش تسمه‌ها، لنگر پیچشی واردهٔ T به دست می‌آید).



مسئله ۲-۲۸

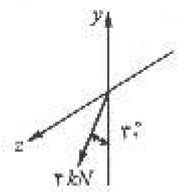


ابتدا برآیند نیروی کششی تسمه‌ها را (بصورت یک نیروی متمرکز و یک لنگر) محاسبه نموده و بر محور اثر می‌دهیم.

$$P_B = ۳ + ۱ = ۴\,kN \Rightarrow B_y = ۴Cos۳۰^\circ = ۳/۴۶\,kN \downarrow$$

$$B_z = ۴\,Sin۳۰^\circ = ۲\,kN \swarrow$$

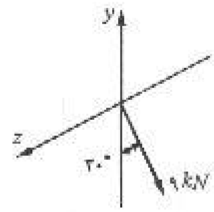
$$M_B = (۳ - ۱)\left(\frac{۰/۲۵}{۲}\right) = ۰/۲۵\,kN.m \circlearrowleft$$



$$P_C = ۸ + ۱ = ۹\,kN \Rightarrow C_y = ۹Cos۳۰^\circ = ۷/۸\,kN \downarrow$$

$$C_z = ۹\,Sin۳۰^\circ = ۴/۵\,kN \swarrow$$

$$M_C = (۸ - ۱)\left(\frac{۰/۲۵}{۲}\right) = ۰/۸۷۵\,kN.m \circlearrowleft$$



حال عکس‌العمل تکیه‌گاهها (یاتاقانهای A و D) را محاسبه می‌کنیم:

$$+\circlearrowleft \sum M_{z_A} = ۰ : D_y(۰/۹) - ۷/۸(۰/۷) - ۳/۴۶(۰/۲) = ۰ \Rightarrow D_y = ۶/۸۴\,kN \uparrow$$

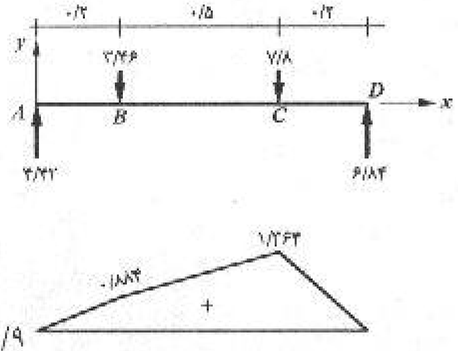
$$\uparrow^+ \sum F_y = ۰ : A_y + D_y - ۳/۴۶ - ۷/۸ = ۰ \qquad \Rightarrow A_y = ۴/۴۲\,kN \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{y_A} = ۰ : -D_z(۰/۹) + ۴/۵(۰/۷) - ۲(۰/۲) = ۰ \Rightarrow D_z = ۳/۰۵\,kN \swarrow$$

$$+\downarrow \sum F_z = ۰ : +A_z + D_z + ۲ - ۴/۵ = ۰ \Rightarrow A_z = -۰/۵۵ \swarrow$$

لنگر پیچشی وارده $+\circlearrowleft \sum M_{x_A} = ۰ : -T + ۰/۲۵ + ۰/۸۷۵ = ۰ \Rightarrow T = ۱/۱۲۵\,kN.m \circlearrowleft^+$

الف، رسم نمودار لنگه خمشی برای صفحهٔ xy



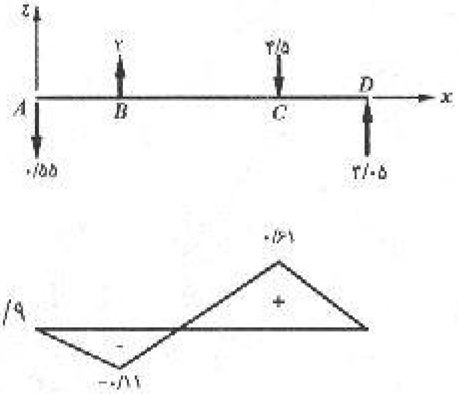
مقطع AB، $M = ۴/۴۲x$ ؛ $۰ \leqslant x \leqslant ۰/۲$

مقطع BC، $M = ۴/۴۲x - ۳/۴۶\,(x - ۰/۲)$

$= ۰/۹۶x + ۰/۶۹۲$ ؛ $۰/۲ \leqslant x \leqslant ۰/۷$

مقطع CD، $M = ۶/۸۴\,(۰/۹ - x)$ ؛ $۰/۷ \leqslant x \leqslant ۰/۹$

ب، رسم نمودار لنگر خمشی برای صفحه xz



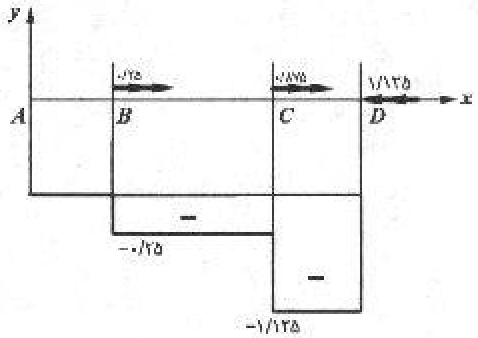
مقطع AB، $M = -۰/۵۵x$ ؛ $۰ \leqslant x \leqslant ۰/۲$

مقطع BC، $M = ۲(x - ۰/۲) - ۰/۵۵x$

$= ۱/۴۵x - ۰/۴$ ؛ $۰/۲ \leqslant x \leqslant ۰/۷$

مقطع CD، $M = ۳/۰۵\,(۰/۹ - x)$ ؛ $۰/۷ \leqslant x \leqslant ۰/۹$

پ: رسم نمودار لنگر پیچشی،

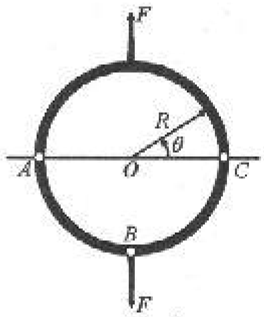


مقطع AB، $T = ۰$

مقطع BC، $T = -۰/۲۵$

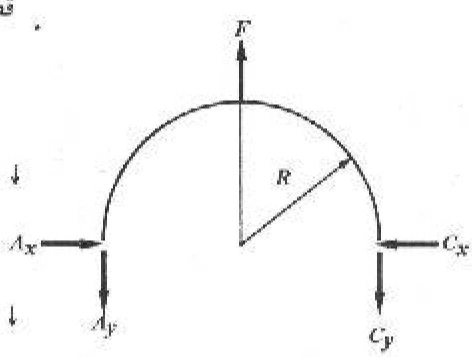
مقطع CD، $T = -۱/۱۲۵$

۲-۲۹. یک حلقهٔ دایره شکل با سه مفصل در نقاط A، B، C تحت تأثیر بارگذاری نشان داده شده در شکل قرار دارد. مطلوب است تعیین روابط ریاضی $P(\theta)$، $V(\theta)$ و $M(\theta)$ برای ناحیهٔ $0<\theta<90^\circ$. از قرارداد علامت تیرها استفاده نمایید.



مسئله ۲-۲۹

قطعهٔ AC

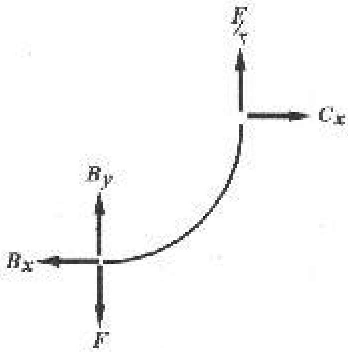


$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 : F.R - C_y(2R) = 0 \Rightarrow C_y = \frac{F}{2} \downarrow$$

$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 : -A_y + F - C_y = 0 \Rightarrow A_y = \frac{F}{2} \downarrow$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = C_x$$

قطعه BC



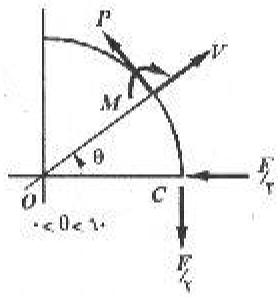
$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 : \frac{F}{2}(R) - C_x(R) = 0 \Rightarrow C_x = \frac{F}{2} \longrightarrow$$

$$\nwarrow^+ \sum F_x = 0 : -P - \frac{F}{2}Sin\theta + \frac{F}{2}Cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow P = \frac{F}{2}(Cos\theta - Sin\theta) \nwarrow$$

$$\nearrow^+ \sum F_y = 0 : V - \frac{F}{2}Cos\theta - \frac{F}{2}Sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow V = \frac{F}{2}(Cos\theta + Sin\theta) \nearrow$$

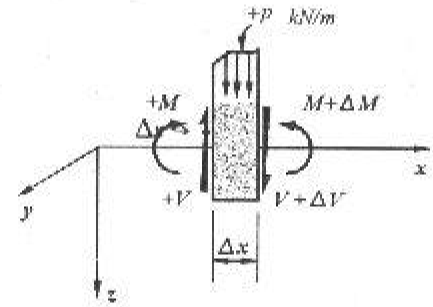


$$+\circlearrowleft \sum M_o = 0 \Rightarrow -M - \frac{F}{2}R + P.R = 0$$

$$\Rightarrow M = -\frac{F}{2}R + \frac{F}{2}(Cos\theta - Sin\theta)$$

$$M = \frac{F}{2}R\,(Cos\theta - Sin\theta - 1)$$

۲-۳۰. اگر جهت مثبت نیروهای داخلی P، V، M طبق شکل تعریف شده باشد، مطلوب است تعیین روابط ۲-۴، ۲-۵ و ۲-۶ برای آن



مسأله ۲-۳۰

$$+\downarrow \sum F_z = 0 \Rightarrow -V + P.\Delta x + V + \Delta V = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta x} = -P \Rightarrow \lim \frac{\Delta V}{\Delta x} = -P \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -P \quad (1)$$

$$+\circlearrowleft \sum M = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{M} + \Delta M - \cancel{M} - P\frac{\Delta x^2}{2} - (V + \Delta V)\,\Delta x = 0$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{P\Delta x}{2} + (V + \Delta V) \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P\frac{\Delta x}{2} + \lim_{\Delta x \to 0} (V + \Delta V)$$

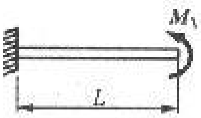
$$\therefore \frac{dM}{dx} = 0 - V \Rightarrow \frac{dM}{dx} = -V \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dM}{dx}\right) = \frac{d(-V)}{dx} \Rightarrow \frac{d^2M}{dx^2} = +P$$

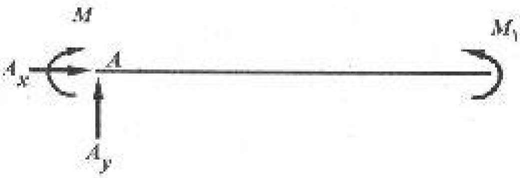
انتگرال از رابطهٔ (1) $\Rightarrow V_D - V_C = \int_{x_C}^{x_D} -P\,dx$

انتگرال از رابطهٔ (2) $\Rightarrow M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} -V\,dx$

۲-۳۱ تا ۲-۵۳. مطلوب است رسم ترسیمه‌های تغییرات نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیرهای نشان داده شده در شکل با استفاده از روش جمع زدن. با توجه به ترسیمهٔ تغییرات لنگر خمشی، منحنی ارتجاعی تیرها را نیز به طور کیفی رسم نمایید. در تمام مسائل از وزن تیرها صرف‌نظر نمایید و از قرارداد علامت تیرها استفاده کنید.



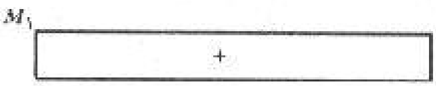
مسأله ۲-۳۱



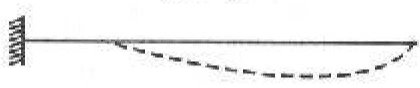
$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

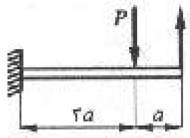
$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 : -M + M_1 = 0 \Rightarrow M = +M_1$$

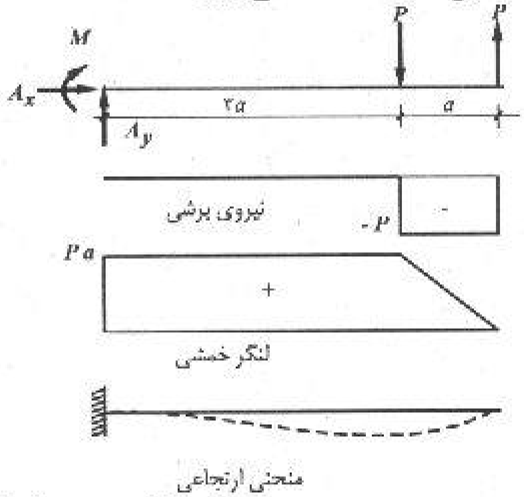


لنگر خمشی


منحنی ارتجاعی



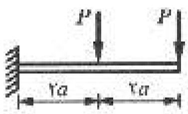
مسئله ۲-۳۲



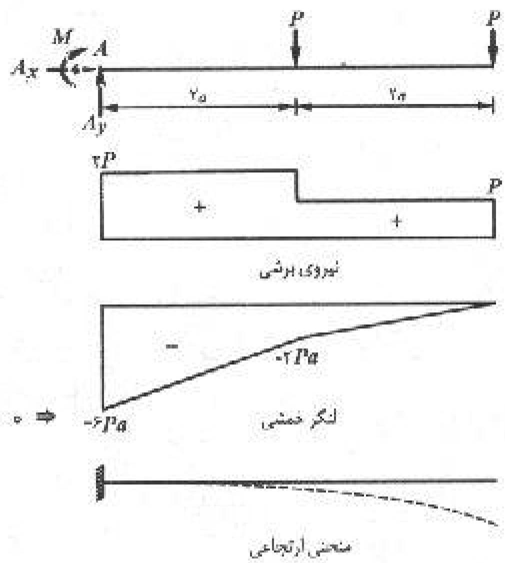
$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$

$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y = ۰$

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ : -M - P(۳a) + P(۴a) = ۰ \Rightarrow M = Pa$



مسئله ۲-۳۳

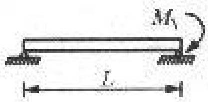


$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$

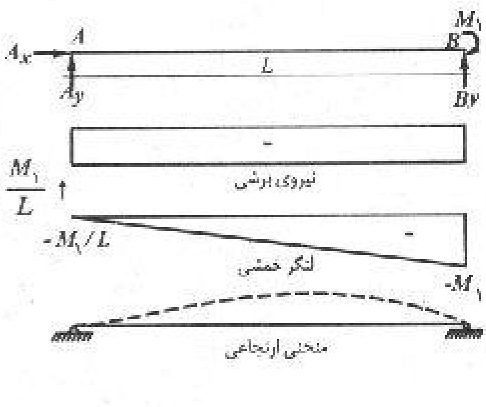
$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y = ۲P$

$+\circlearrowleft \sum M_B = ۰ \Rightarrow -M - P(۲a) - P(۴a) = ۰ \Rightarrow$

$M = -۶Pa$



مسئله ۲-۳۴

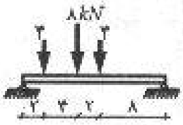


$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$

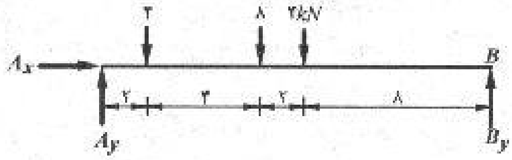
$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ : -M_۱ + B_y L = ۰ \Rightarrow B_y = \dfrac{M_۱}{L} \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_B = ۰ \Rightarrow -M_۱ - A_y L = ۰$

$\Rightarrow A_y = -\dfrac{M_۱}{L} \uparrow \Rightarrow A_y = \dfrac{M_۱}{L} \downarrow$



مسأله ۲-۳۵



$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$

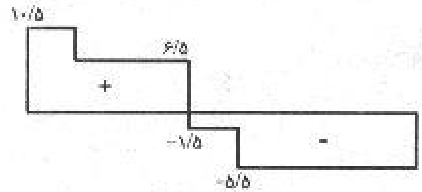
$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \Rightarrow$

$B_y(۱۶) - ۴(۸) - ۸(۶) - ۴(۲) = ۰$

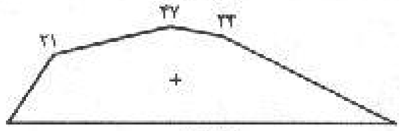
$\Rightarrow B_y = ۵/۵\, kN \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_B = ۰ \Rightarrow -A_y(۱۶) + ۴(۱۴) + ۸(۱۰)$

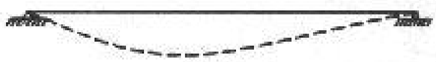
$+ ۴(۸) = ۰ \Rightarrow A_y = ۱۰/۵\, kN \uparrow$



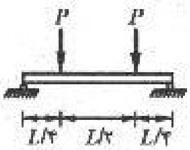
نیروی برشی



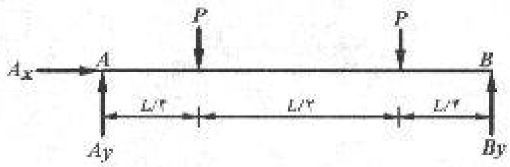
لنگر خمشی



منحنی ارتجاعی



مسأله ۲-۳۶



$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$

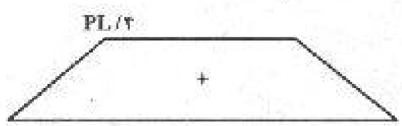
$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰$

$\Rightarrow B_y\,(L) - P\left(\frac{۳L}{۴}\right) - P\left(\frac{L}{۴}\right) = ۰ \Rightarrow B_y = P \uparrow$

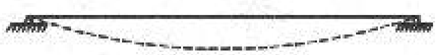
$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y + B_y - ۲P = ۰$

$\Rightarrow A_y = P \uparrow$

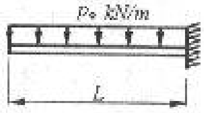
نیروی برشی



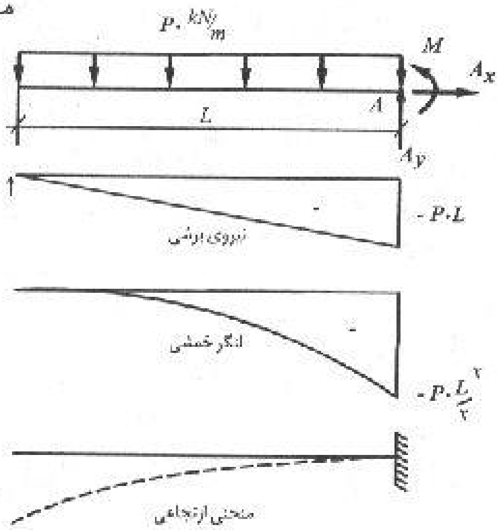
لنگر خمشی



منحنی ارتجاعی



مسئله ۲-۳۷

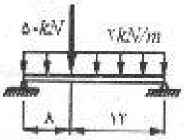


$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$

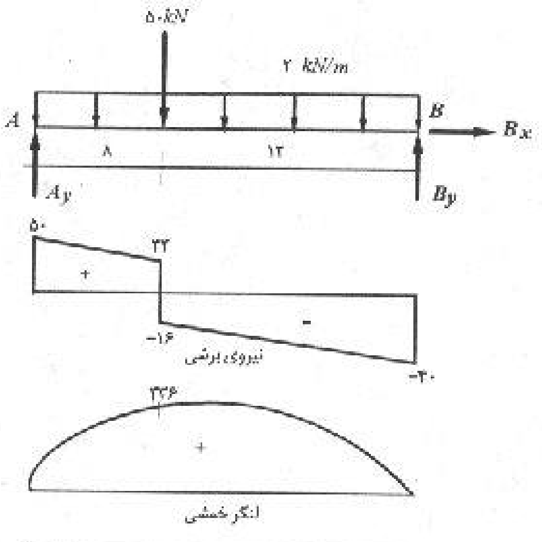
$\uparrow^+ \sum F_y = ۰ : A_y - P_۰L = ۰ \Rightarrow A_y = P_۰L \uparrow$

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \Rightarrow M + P_۰L\left(\frac{L}{۲}\right) = ۰$

$\Rightarrow M = -\frac{P_۰L^۲}{۲}$



مسئله ۲-۳۸



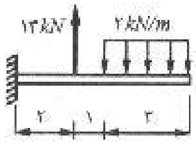
$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow B_x = ۰$

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰$

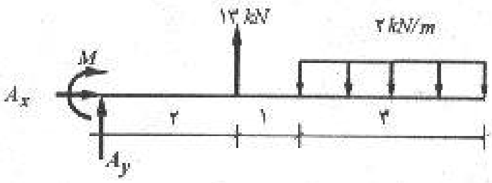
$\Rightarrow B_y(۲۰) - ۵۰(۸) - ۲(۲۰)\left(\frac{۲۰}{۲}\right) = ۰$

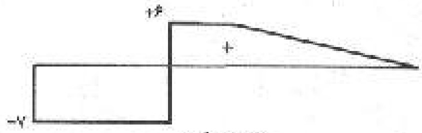
$\Rightarrow B_y = ۴۰\,kN \uparrow$

$\uparrow^+ \sum F_y = ۰ : A_y + B_y - ۵۰ - (۲)(۲۰) = ۰ \Rightarrow A_y = ۵۰\,kN \uparrow$

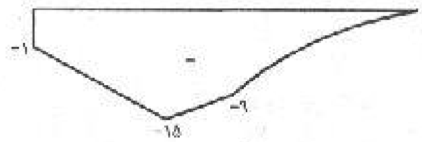


مسألهٔ ۲-۳۹





نیروی برشی



لنگر خمشی

منحنی ارتجاعی

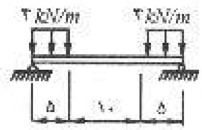
$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$

$+\!\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y + ۱۳ - (۲)(۳) = ۰$

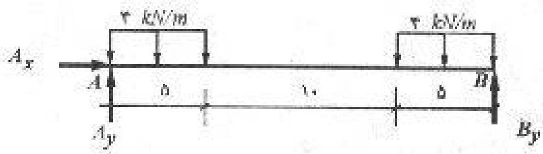
$\Rightarrow A_y = -۷\,kN \uparrow \Rightarrow A_y = ۷\,kN \downarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \Rightarrow -M - (۲)(۳)\left(۳ + \frac{۳}{۲}\right)$

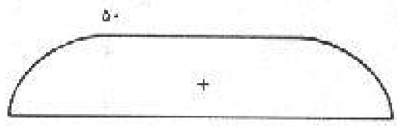
$+ ۱۳(۲) = ۰ \Rightarrow M = -۱\,kN.m$



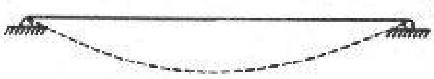
مسألهٔ ۲-۴۰



نیروی برشی



لنگر خمشی



منحنی ارتجاعی

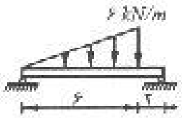
$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \Rightarrow B_y(۲۰) - ۴(۵)(۱۷/۵)$

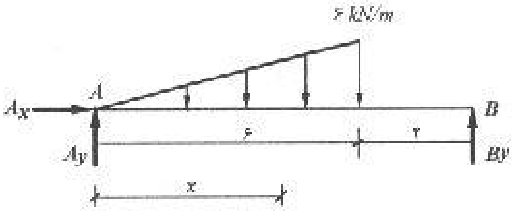
$- ۴(۵)(۲/۵) = ۰ \Rightarrow B_y = ۲۰\,kN \uparrow$

$+\!\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y + B_y - ۴(۵) - ۴(۵) = ۰$

$\Rightarrow A_y = ۲۰\,kN \uparrow$



مسأله ۲-۴۱



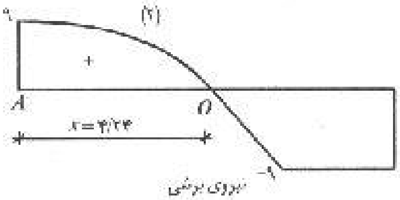
$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 : B_y (8) - 6\left(\frac{6}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(6) = 0$$

$$\Rightarrow B_y = 9\ kN \uparrow$$

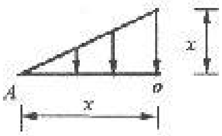
$$\uparrow + \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 6\left(\frac{6}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 9\ kN \uparrow$$

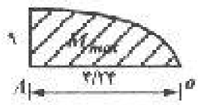


منحنی ارتجاعی

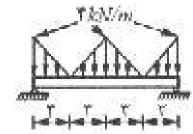
توضیح: بمنظور تعیین لنگر ماکزیمم باید سطح زیر نمودار برش در فاصله A تا o محاسبه شود:



$$\frac{1}{2}(x \cdot x) = 9 \Rightarrow x = 4/24$$



$$M_{max} = \frac{2}{3}(9)(4/24) = 25/4\ kN.m$$

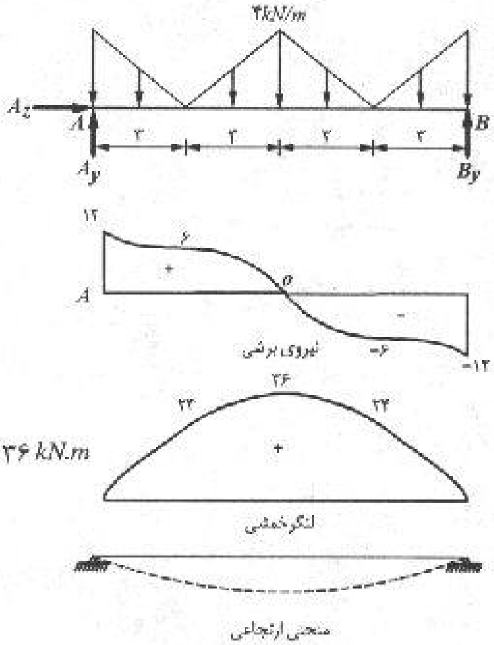


مسأله ۲-۴۲

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 : B_y (12) - \left(3 \times \frac{4}{2}\right)\left(\frac{1}{3} \times 3\right)$$

$$- \left(6 \times \frac{4}{2}\right)(6) - \left(3 \times \frac{4}{2}\right)\left(9 + \frac{2}{3} \times 3\right) = 0$$



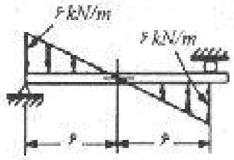
$$B_y = ۱۲\,kN\uparrow$$

$$\uparrow^+ \sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y + B_y - ۴\left(۳\times\frac{۴}{۲}\right) = ۰$$

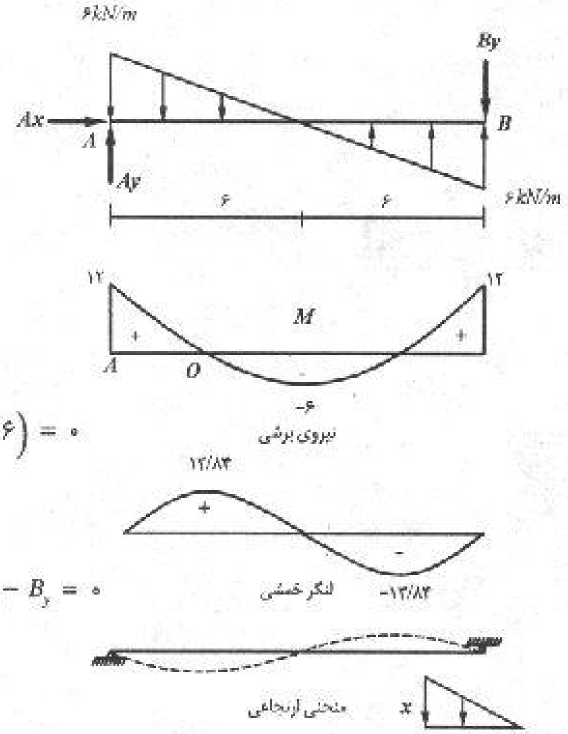
$$\Rightarrow A_y = ۱۲\,kN\uparrow$$

$M_{max} =$ سطح زیر نمودار برش از A تا o

$$= \underbrace{\left[۶\times۳ + \frac{۱}{۳}(۶\times۳)\right]}_{۲۴} + \frac{۲}{۳}(۶\times۳) = ۳۶\,kN.m$$



مسأله ۷-۴۳



$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$$

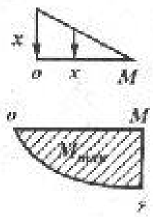
$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \Rightarrow -B_y\,(۱۲)$$

$$- ۶\left(\frac{۶}{۲}\right)\left(\frac{۶}{۳}\right) + ۶\left(\frac{۶}{۲}\right)\left(۶ + \frac{۲}{۳}\times ۶\right) = ۰$$

$$B_y = ۱۲\,kN\downarrow$$

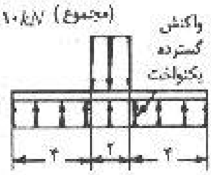
$$\uparrow^+ \sum F_y = ۰ : A_y + ۶\left(\frac{۶}{۲}\right) - ۶\left(\frac{۶}{۲}\right) - B_y = ۰$$

$$\Rightarrow A_y = ۱۲\,kN\uparrow$$

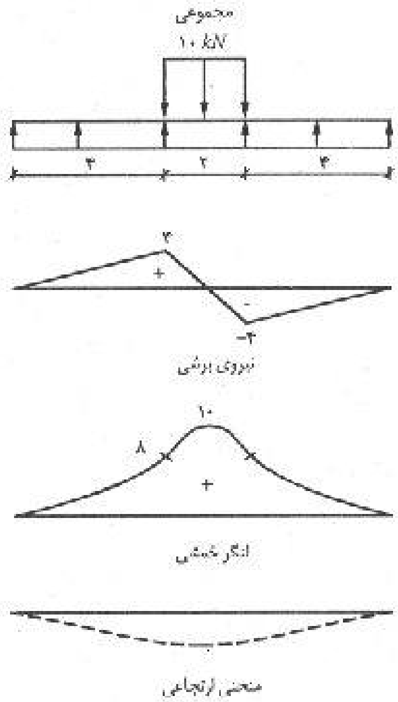


$$\frac{۱}{۲}(x\,.\,x) = ۶ \Rightarrow x = ۳/۴۶$$

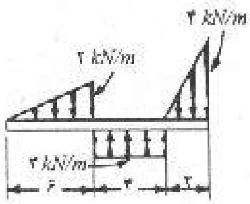
$$M_{max} = \frac{۲}{۳}(۶)(۳/۴۶) = ۱۳/۸۴$$



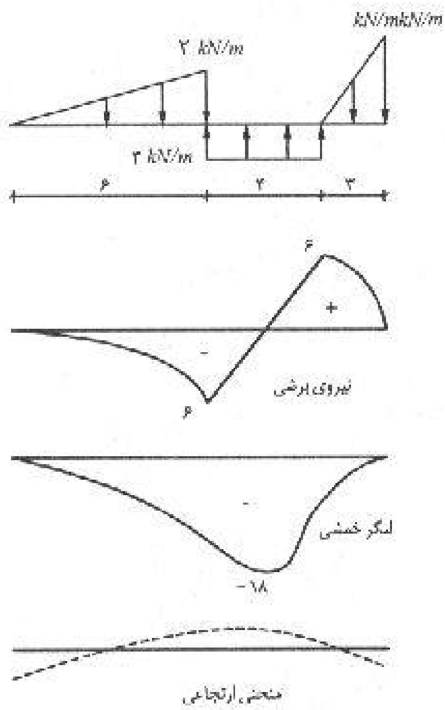
مسأله ۲-۴۴

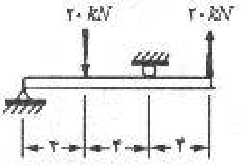


$$\uparrow^{+} \sum F_y = 0 : R_y(10) - 10 = 0 \Rightarrow R_y = 1\ kN/m$$

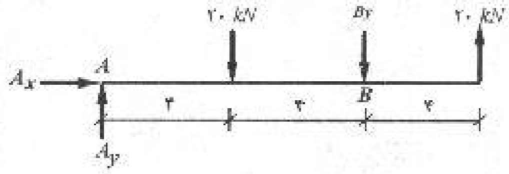


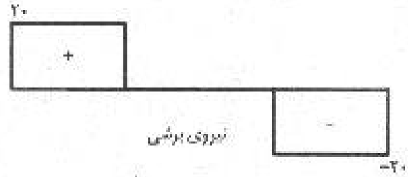
مسأله ۲-۴۵





مسأله ۲-۴۶





نیروی برشی

لنگر خمشی

منحنی ارتجاعی

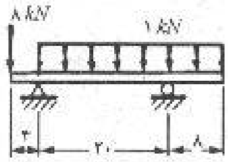
$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ : -B_y(۸) - ۲۰(۴) + ۲۰(۱۲) = ۰$

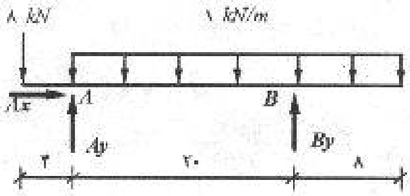
$\Rightarrow B_y = ۲۰\,kN \downarrow$

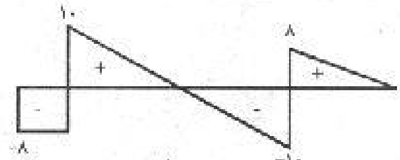
$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y + ۲۰ - B_y - ۲۰ = ۰$

$\Rightarrow A_y = ۲۰\,kN \uparrow$

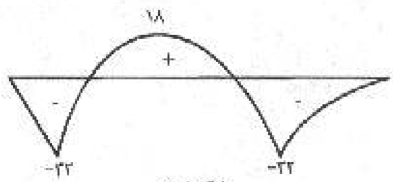


مسأله ۲-۴۷





نیروی برشی



لنگر خمشی

منحنی ارتجاعی

$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$

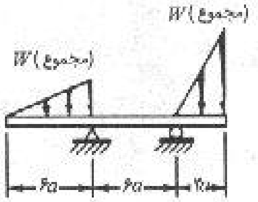
$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰$

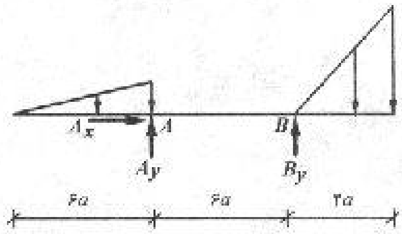
$\Rightarrow B_y(۲۰) + ۸(۴) - ۱(۲۸)\left(\frac{۲۸}{۲}\right) = ۰$

$\Rightarrow B_y = +۱۸\,kN \uparrow$

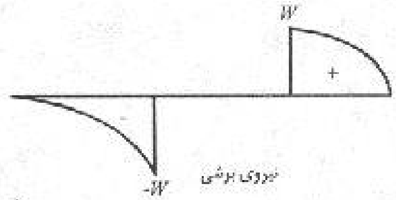
$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y + B_y - ۸ - ۱(۲۸) = ۰$

$\Rightarrow A_y = +۱۸\,kN \uparrow$





مسئله ۲-۴۸



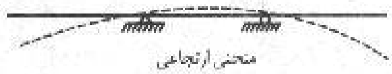
$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$

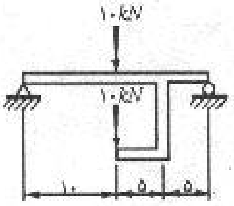
$+\circlearrowleft \ \sum M_A = ۰ : B_y\,(۶a) - W(۶a + ۲a) + W(۲a) = ۰$

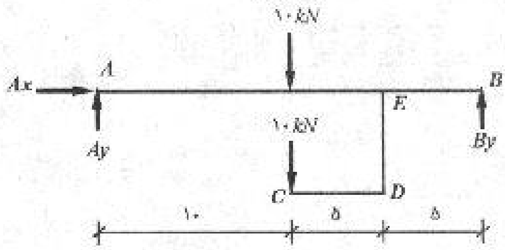
$\Rightarrow B_y = W \uparrow$

$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y + B_y - ۲W = ۰$

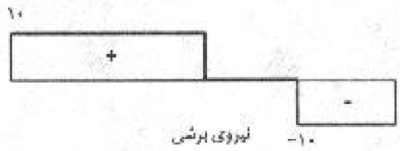
$\Rightarrow A_y = W \uparrow$







مسئله ۲-۴۹



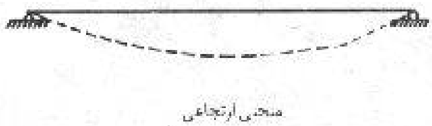
$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$

$+\circlearrowleft \ \sum M_A = ۰ \Rightarrow B_y\,(۲۰) - (۱۰+۱۰)(۱۰) = ۰$

$\Rightarrow B_y = ۱۰\,kN \uparrow$

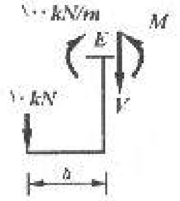
$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y + B_y - (۱۰ + ۱۰) = ۰$

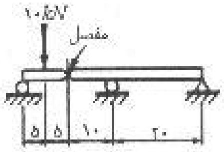
$\Rightarrow A_y = ۱۰\,kN \uparrow$



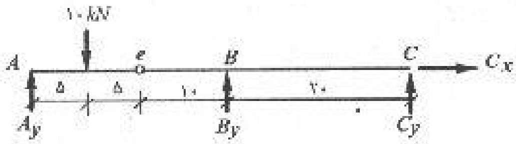
توضیح: بمنظور تعیین لنگر در نقطهٔ E، این قسمت را جدا می‌کنیم. (شکل زیر) لنگر در طرف چپ این قطعه معلوم و مساوی $kN.m$ ۱۰۰+ می‌باشد.

بنابراین برای تعادل این قطعه باید در سمت راست لنگر برابر $kN.m$ ۵۰+ باشد.

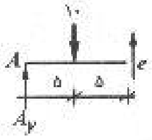


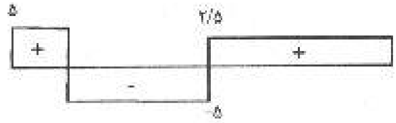


مسأله ۲-۵۰



$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ \Rightarrow C_x = ۰$

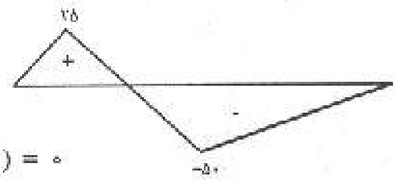




نیروی برشی

$+\circlearrowleft \sum M_e = ۰ \Rightarrow -A_y\,(۱۰) + ۱۰(۵) = ۰$

$\Rightarrow A_y = ۵ kN \uparrow$



لنگر خمشی

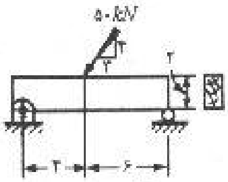
$+\circlearrowleft \sum M_B = ۰ \Rightarrow C_y\,(۲۰) + ۱۰(۵) - ۵(۲۰) = ۰$

$\Rightarrow C_y = -۲/۵ \uparrow \Rightarrow C_y = ۲/۵ kN \downarrow$

$+\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y + B_y - C_y - ۱۰ = ۰$

منحنی ارتجاعی

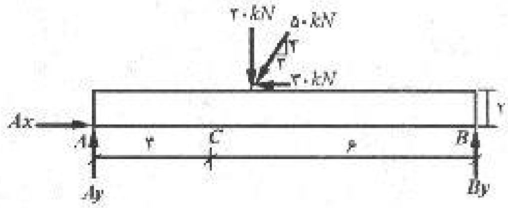
$\Rightarrow B_y = ۷/۵ kN \uparrow$



مسأله ۲-۵۱

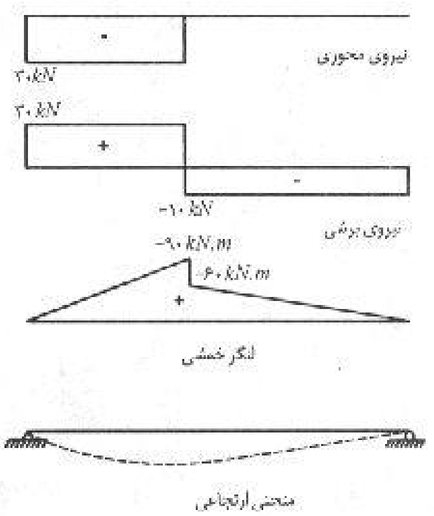
$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : A_x - ۳۰ = ۰ \Rightarrow A_x = ۳۰ kN \rightarrow$

$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ : B_y\,(۱۰) + ۳۰(۲) - ۴۰(۴) = ۰ \Rightarrow B_y = ۱۰ kN \uparrow$



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 40 = 0$$

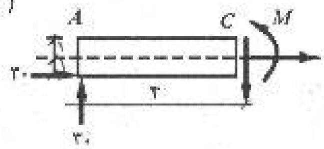
$$\Rightarrow A_y = 30\,kN \uparrow$$



توضیح: بمنظور رسم نمودار لنگر خمشی توجه به این نکته ضروری است که در ناحیه AC علاوه بر لنگر ناشی از بارگذاری قائم، لنگر حاصل از نیروی افقی نیز مؤثر می‌باشد. بنابراین لنگر در سمت چپ C برابر است با:

$$+\left(\sum M_C = 0 \Rightarrow M + 30(1) - 30(4) = 0 \right.$$

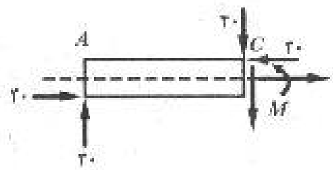
$$\left. M = 90\,kN.m \right)$$



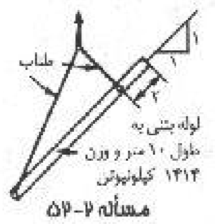
و لنگر در سمت راست C نیز برابر است با:

$$+\left(\sum M_C = 0 \Rightarrow M + 30(1) + 30(1) - 30(4) = 0 \right.$$

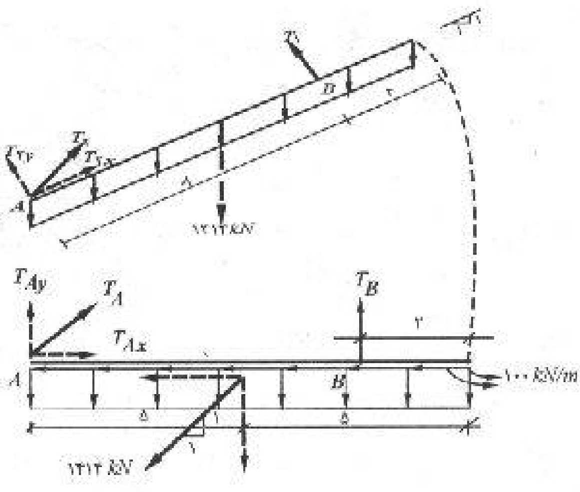
$$M = 60\,kN.m \uparrow$$



به‌عبارت دیگر در نقطهٔ C نمودار لنگر دارای جهش می‌باشد.



مسأله ۷-۵۲



$$+\left(\sum M_A = 0 \right.$$

$$\Rightarrow T_B(8) - 1414\left(\frac{10}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow T_B = 624/9 \approx 625$$

$$\Rightarrow T_B = 625\,kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_1 + T_{Ay} - 1414\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

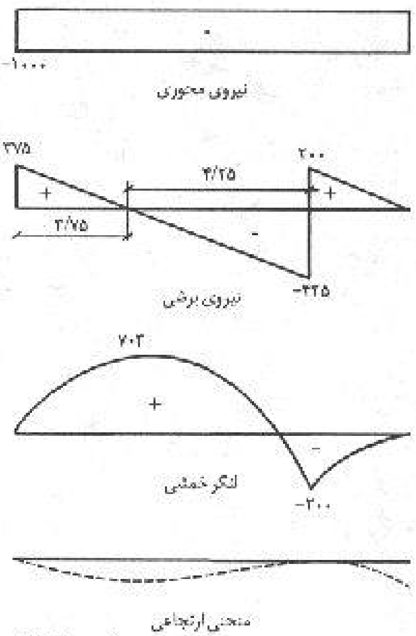
$$\Rightarrow T_{Ay} = 374/9 \approx 375$$

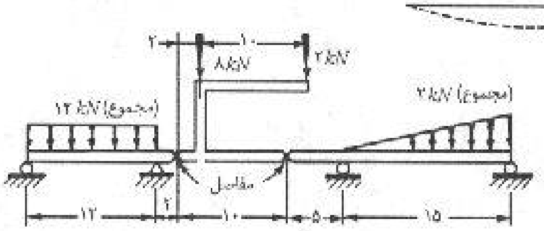
$$\Rightarrow T_{Ay} = 375\,kN \uparrow$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \Rightarrow T_{Ax} - 1414\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

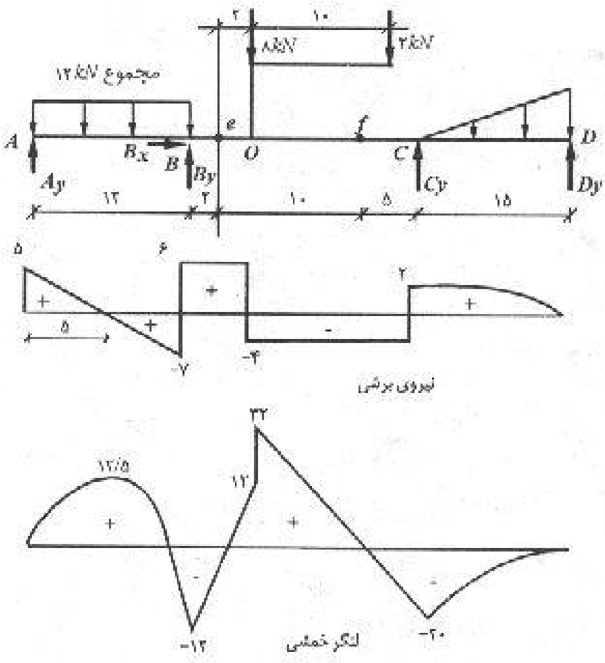
$$\Rightarrow T_{Ax} = 999/8 \approx 1000$$

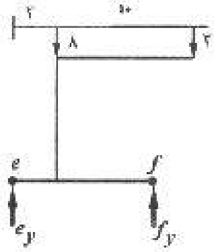
$$T_{Ax} = 1000\,kN \longrightarrow$$





مسأله ۲-۵۳



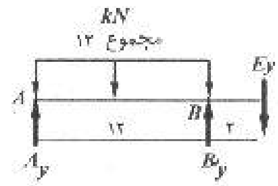


$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_e = 0 \Rightarrow f_y(10) - 2(12) - 8(2) = 0$

$f_y = 4\,kN$

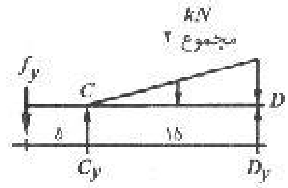
$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow e_y = 6\,kN$



$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow B_y(12) - e_y(14) - 12(6) = 0$

$B_y = 13\,kN \uparrow$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 5\,kN \uparrow$

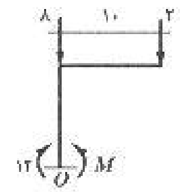


$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \Rightarrow D_y(15) + f_y(5) - 2(10) = 0$

$D_y = 0$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow C_y = 6\,kN \uparrow$

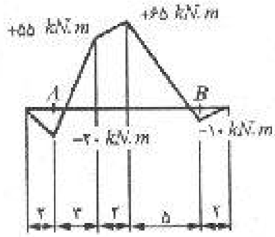
توضیح: همانند مسأله (۲-۴۹) به‌منظور تعیین لنگر در نقطه o این قسمت را جدا نموده با توجه به جمع سطوح برش تا این نقطه، میزان لنگر در سمت چپ نقطهٔ o برابر $+12\,kN.m$ می‌باشد بنابراین باید در سمت راست نقطهٔ o لنگر برابر $+32\,kN.m$ باشد:



$+\circlearrowleft \sum M_o = 0 \Rightarrow M - 12 - 2(10) = 0$

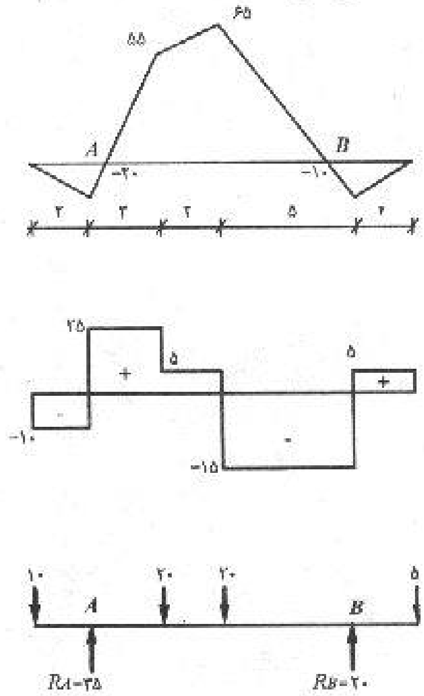
$\Rightarrow \quad M = 32\,kN.m$

۲-۵۴ الی ۲-۵۶. منحنی تغییرات لنگر خمشی برای تیرهایی که در نقاط A و B تکیه دارند، نشان داده شده است. شکل بارگذاری این تیرها را مشخص نمایید. تمام منحنی‌های غیرخطی سهمی درجه ۲ می‌باشند. رسم ترسیمهٔ تغییرات نیروی برشی کمک خوبی برای تعیین شکل بارگذاری می‌باشد.



مسأله ۲-۵۴

مقادیر نیروی برشی را در مقاطع مختلف محاسبه می‌کنیم و از روی این مقادیر، نیروهای اعمال شده مشخص خواهند شد.



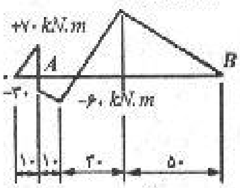
$۰<x<۲ \qquad V=\dfrac{-۲۰}{۲}=-۱۰\,kN$

$۲<x<۵ \qquad V=\dfrac{۵۵-(-۲۰)}{۳}=۲۵\,kN$

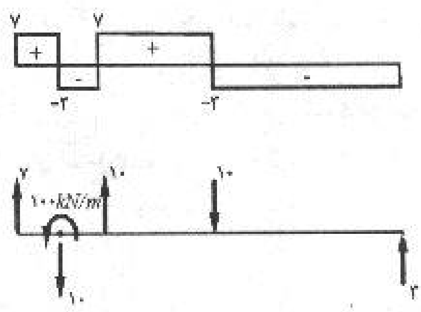
$۵<x<۷ \qquad V=\dfrac{۶۵-۵۵}{۲}=۵\,kN$

$۷<x<۱۲ \qquad V=\dfrac{-۱۰-۶۵}{۵}=-۱۵\,kN$

$۱۲<x<۱۴ \qquad V=\dfrac{۰-(-۱۰)}{۲}=۵\,kN$



مسأله ۲-۵۵

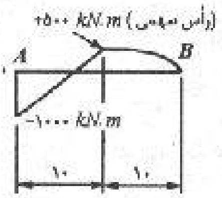


$۰<x<۱۰ \qquad V=\dfrac{۷۰}{۱۰}=۷\,kN$

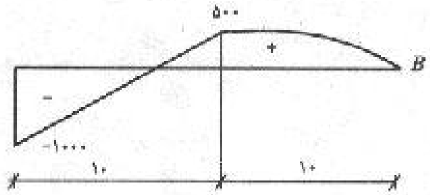
$۱۰<x<۲۰ \qquad V=\dfrac{-۶۰-(-۳۰)}{۱۰}=-۳\,kN$

$$۲۰<x<۵۰ \qquad V=\frac{۱۵۰-(-۶۰)}{۳۰}=۷\,kN$$

$$۵۰<x<۱۰۰ \qquad V=\frac{۰-۱۵۰}{۵۰}=-۳\,kN$$

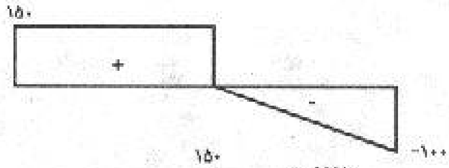


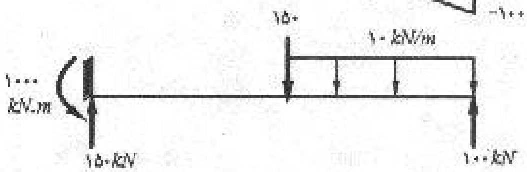
مسئله ۲-۵۷



$$۰<x<۱۰ \; : \; V=\frac{۵۰۰-(-۱۰۰۰)}{۱۰}=۱۵۰\,kN$$

$$x=۱۰ \; : \; V=\tan ۰=۰$$

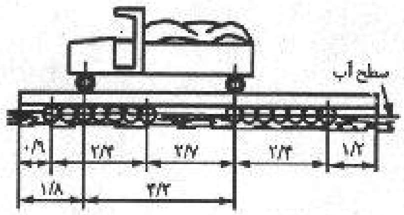




چون منحنی ممان خمشی سهمی است با توجه به رابطه $V=\frac{dM}{dx}$ رابطه نیروی برشی خطی خواهد بود. از طرفی مساحت زیر نمودار نیروی برشی بین دو نقطه معرف تغییر مقدار ممان خمشی بین آن دو نقطه است:

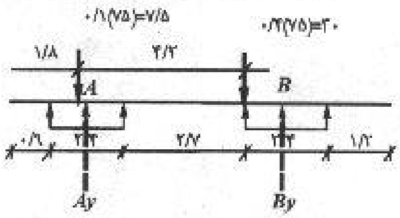
$$\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times V_B=۰-۵۰۰ \Rightarrow V_B=-۱۰۰\,kN$$

۲-۵۷. یک کامیون به وزن ۷۵ کیلونیوتن در روی یک کلک قرار دارد. فرض کنید که هر یک از چرخهای جلو ۰/۱ وزن کامیون و هر یک از چرخهای عقب، ۰/۴ وزن کامیون را حمل می‌کنند. این کلک دارای دو تیر طولی می‌باشد که به فاصلهٔ ۱/۸ متر از یکدیگر قرار دارند و هر یک نصف وزن کامیون را حمل می‌نمایند. این دو تیر طولی به نوبهٔ خود در روی دو دسته چوب به هم بسته که شناوری کلک را تأمین می‌کنند، تکیه دارند. اگر فرض نماییم که نیروهای واکنش تکیه‌گاهی به صورت گستردهٔ یکنواخت در روی سطح تماس وارد شوند، مطلوب است رسم ترسیمهٔ تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی برای هر یک از تیرها در حالی که کامیون در وضعیت نشان داده شده در شکل قرار دارد. (از روش جمع زدن استفاده نمایید).



مسأله ۲-۵۷

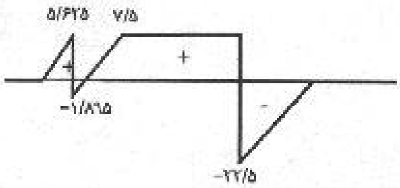
نقاط A و B محل برآیند عکس‌العملها در نظر گرفته شده‌اند



$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \Rightarrow B_y\,(۲/۷ + ۱/۲ + ۱/۲)$$

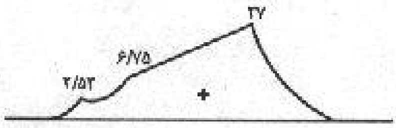
$$+ ۷/۵\left(\frac{۲/۴}{۲} - ۰/۹\right) - ۳۰(۲/۷ + ۱/۲) = ۰$$

$$B_y = ۲۲/۵\,kN \Rightarrow R_B = \frac{B_y}{۲/۴} = ۹/۳۷۵\,kN/m$$

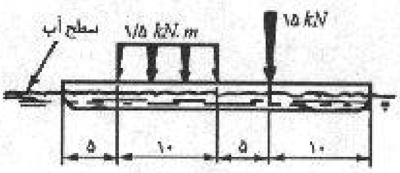


$$+\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y + B_y - ۷/۵ - ۳۰ = ۰$$

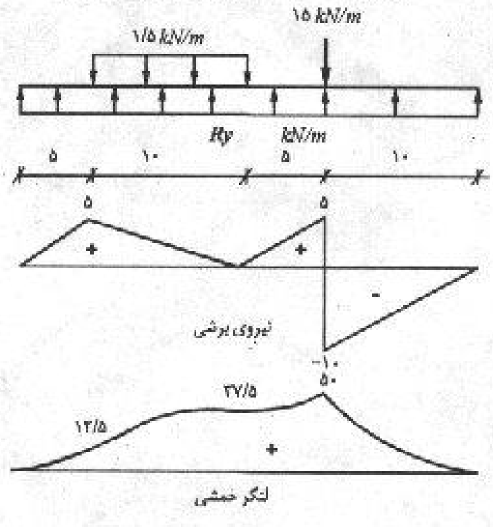
$$A_y = ۱۵\,kN \Rightarrow R_A = \frac{A_y}{۲/۴} = ۶/۲۵\,kN/m$$



۲-۵۸. یک قایق باریک، همانند شکل بارگذاری شده است. مطلوب است رسم منحنی تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی برای بارهای وارده.



مسأله ۲-۵۸



ابتدا نیرویی را که بر هر متر طول قایق از طرف آب وارد می‌شود محاسبه می‌کنیم:

$$+\uparrow \sum F_y = ۰ : R_y(۳۰) - ۱۵ - ۱/۵(۱۰) = ۰ \rightarrow R_y = ۱\,kN/m$$

$F_۱ = ۰$ $\qquad$ $F_۲ = ۱\left(kN/m\right) \times ۵(m) = ۵\,kN$

$F_۳ = F_۲ + ۱ \times ۱۰ - ۱/۵ \times ۱۰ = ۰$ $\qquad$ $F_۴ = F_۳ + ۱ \times ۵ = ۵\,kN$

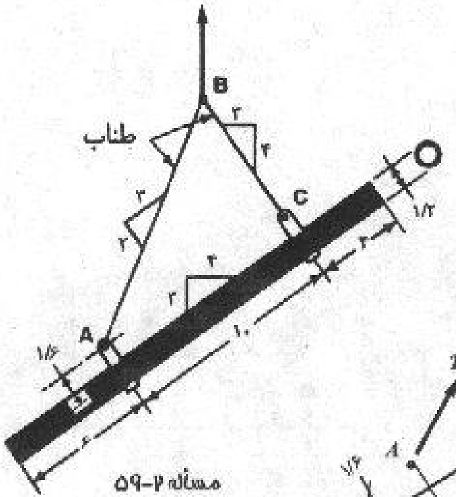
$F_۴{}' = F_۴ - ۱۵ = -۱۰\,kN$ $\qquad$ $F_۵ = -۱۰ + ۱ \times ۱۰ = ۰$

$M_۱ = ۰$ $\qquad$ $M_۲ = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۵ = ۱۲/۵\,kN.m$

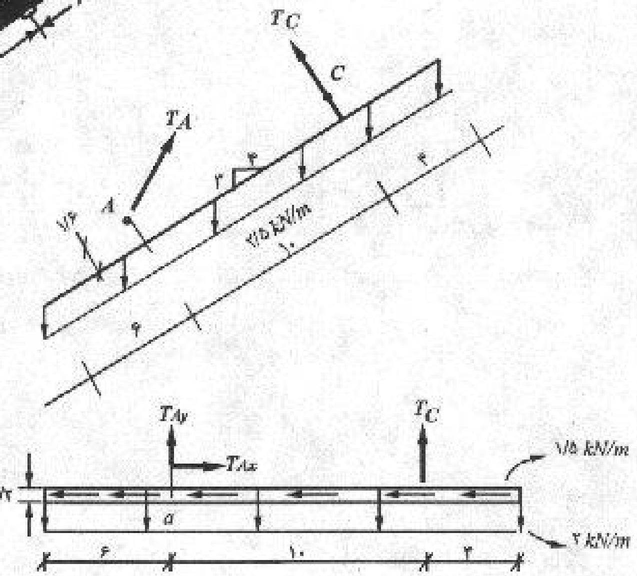
$M_۳ = ۱۲/۵ + \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۵ = ۳۷/۵\,kN.m$ $\qquad$ $M_۴ = ۳۷/۵ + \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۵ = ۵۰\,kN.m$

$M_۵ = ۵۰ - \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۰ = ۰$

۲-۵۹. لوله‌ای به قطر ۱۲۰ سانتی‌متر و به وزن ۲/۵ کیلونیوتن بر متر مطابق شکل توسط دو کابل نگه داشته شده است. مطلوب است رسم منحنی تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی برای لولهٔ فوق با استفاده از روش جمع زدن.



مسأله ۲-۵۹

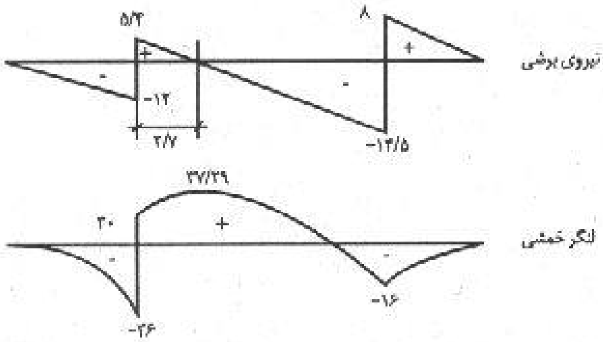


$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : T_{Ax} - ۱/۵(۲۰) = ۰ \Rightarrow T_{Ax} = ۳۰\,kN \longrightarrow$$

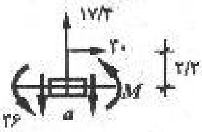
$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ : T_C\,(۱۰) - ۲(۲۰)(۴) - ۱/۵(۲۰)\left(۱/۶ + \frac{۱/۲}{۲}\right)$$

$$T_C = ۲۲/۶\,kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = ۰ : T_{Ay} + T_C - ۲(۲۰) = ۰ \Rightarrow T_{A_y} = ۱۷/۴\,kN \uparrow$$



توضیح: همانند مسألهٔ (۲-۴۹) برای تعیین لنگر در نقطهٔ a خواهیم داشت،

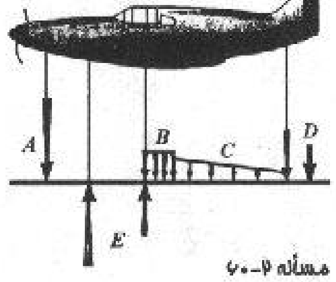


$$+\circlearrowleft \sum M_a = ۰ \Rightarrow M + ۳۶ - ۳۰ \times ۲/۲ = ۰$$

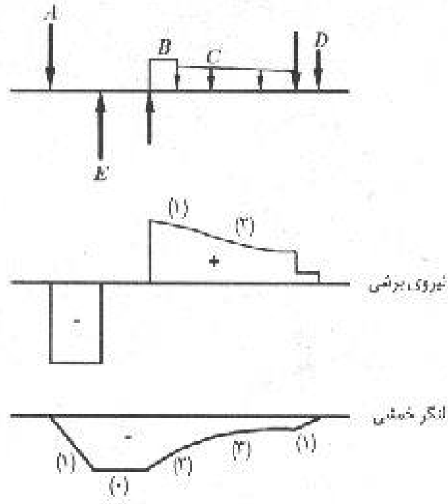
$$M = ۳۰\,kN.m \circlearrowright$$

(شایان ذکر است که مقدار لنگر در سمت چپ a از جمع سطح برش حاصل شده است)

۲-۶۰. نیروهای وارد بر یک هواپیمای کوچک یک موتوره در هنگام پرواز در شکل نشان داده شده است. در این ترسیمه، نیروی A نشان دهندهٔ وزن موتور، نیروی گستردهٔ B نشان‌دهندهٔ وزن کابین و نیروی گستردهٔ C نشان‌دهندهٔ وزن مخزن سوخت و نیروی D نشان‌دهندهٔ نیروی ناشی از سطوح کنترل دم و نیروهای به طرف بالای E نشان‌دهندهٔ نیروهای بر آن که بر بال هواپیما وارد می‌شوند، می‌باشند. با استفاده از این داده‌ها، ترسیمهٔ تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی را به‌صورت کیفی رسم کنید.



مسأله ۲-۶۰



توضیح: اعداد نشان داده شده در کنار منحنی‌ها بیانگر درجهٔ منحنی می‌باشد.

مسائل فصل سوم

۳-۱. اگر یک نیروی محوری کششی معادل ۵۰۰ کیلونیوتن بر یک عضو که از نیمرخ IPB ۱۸۰ ساخته شده، اعمال گردد، مقدار تنش کششی چقدر خواهد بود؟ در صورتی که نیمرخ ناودانی ۳۰۰ باشد، مقدار تنش چقدر خواهد بود؟ برای دیدن سطح مقطع نیمرخهای فوق به جداول ۶ و ۸ ضمیمه مراجعه کنید.

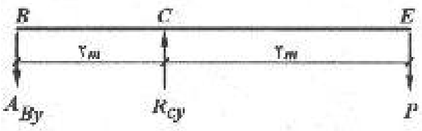
از جداول ۶ و ۸ ضمیمه مقادیر سطح مقطع برای IPB ۱۸۰ و ناودانی ۳۰۰ به ترتیب $۶۵cm^۲$ و $۵۸/۸\,cm^۲$ بدست می‌آید بنابراین:

$$\sigma_۱ = \frac{P}{A} = \frac{۵۰۰ \times ۱۰^۳ (N)}{۶۵ \times ۱۰^۲ (mm^۲)} = ۷۶/۹\,MPa$$

$$\sigma_۲ = \frac{P}{A} = \frac{۵۰۰ \times ۱۰^۳}{۵۸/۸ \times ۱۰^۲} = ۸۵/۰۳\,MPa$$

۳-۲. مثال ۳-۱ را با استفاده از داده‌های زیر مجدداً حل نمائید. فاصلهٔ BC مساوی ۲ متر، فاصله CE مساوی ۴ متر، ضخامت دیوار جان پناه مساوی ۰/۲ متر، وزنی که باید بلند شود مساوی ۸ کیلونیوتن، ابعاد تیر چوبی $۰/۲۵m \times ۰/۳۵m$، قطر پیچها مساوی ۱۸ میلی‌متر و سطح مقطع مؤثر آن در زیر دنده‌ها مساوی ۱۵۴ میلی‌متر مربع.

$$\circlearrowleft + \sum M_B = ۰ : ۸ \times ۱۰^۳ \times (۲ + ۴) - R_{cy} \times ۲ = ۰$$



$$\Rightarrow R_{cy} = ۲۴\,kN$$

$$\circlearrowleft + \sum M_C = ۰ \quad : ۸ \times ۱۰^۳ \times ۴ - R_{By} \times ۲ = ۰ \quad \Rightarrow R_{By} = ۱۶\,kN$$

پس نیروی وارد بر هر پیچ $۸kN$ خواهد بود و تنش وارد بر هر پیچ عبارتست از:

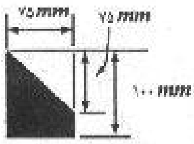
$$\sigma = \frac{۸ \times ۱۰^۳}{۱۵۴} = ۵۱/۹\,MPa$$

تنش لهیدگی در نقطه C:

$$\sigma_b = \frac{۲۴ \times ۱۰^۳}{۰/۲ \times ۰/۲۵} = ۴۸۰\,kPa$$

۳-۳ و ۳-۴. دو عضو کوتاه چدنی دارای سطح مقطعی مطابق شکل می‌باشند. اگر این دو عضو تحت تأثیر نیروی محوری فشاری معادل ۴۵ کیلونیوتن قرار گیرند، اولاً محل تأثیر نیروها را طوری تعیین کنید که هیچگونه لنگر خمشی در مقطع عضو ایجاد نگردد، ثانیاً مقدار تنشهای قائم را تعیین کنید. تمام ابعاد نشان داده شده برحسب میلی‌متر می‌باشند.

مسئله (۳-۳)

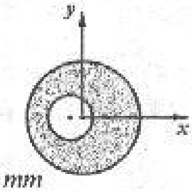


مسئله (۳-۴)

نیرو باید به مرکز سطح وارد شود تا ایجاد لنگر خمشی نکند.
مبدأ مختصات را منطبق بر مرکز دایره بزرگ در نظر می‌گیریم.

$$\bar{x} = \frac{\sum Ax}{\sum A} = \frac{\pi(۵۰)^۲(۰) - \pi(۲۵)^۲(-۱۰)}{\pi(۵۰)^۲ - \pi(۲۵)^۲} \Rightarrow \bar{x} = ۳/۳۳ mm$$

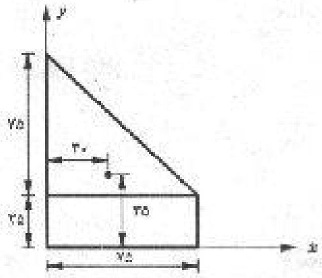
بعلت تقارن مقطع نسبت به محور x مرکز سطح روی محور x واقع می‌باشد یعنی $\bar{y} = ۰$ پس محل اثر نیرو باید بفاصله $۳/۳۳mm$ سمت راست مرکز دایره بزرگ باشد.



$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{۴۵۰۰۰}{\pi(۵۰)^۲ - \pi(۲۵)^۲} = ۷/۶۴ MPa$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A.y}{\sum A} = \frac{۲۵ \times ۷۵ \times \frac{۲۵}{۲} + \frac{۱}{۲} \times ۷۵ \times ۷۵ \times \left(۲۵ + \frac{۷۵}{۳}\right)}{۲۵ \times ۷۵ + \frac{۷۵ \times ۷۵}{۲}} \Rightarrow \bar{y} = ۳۵mm$$

$$\bar{x} = \frac{\sum Ax}{\sum A} = \frac{۲۵ \times ۷۵ \times \frac{۷۵}{۲} + \frac{۱}{۲} \times ۷۵ \times ۷۵ \times \frac{۷۵}{۲}}{۲۵ \times ۷۵ + \frac{۱}{۲} \times ۷۵ \times ۷۵} \Rightarrow \bar{x} = ۳۰ mm$$



$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{۴۵۰۰۰}{۴۶۸۷/۵} = ۹/۶ MPa$$

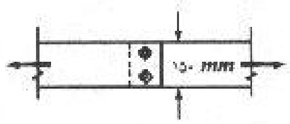
۳-۵. لنگر پیچشی ۴۵۰ نیوتن متر توسط یک چرخ‌دنده به محوری به قطر ۵۰ میلی‌متر که توسط یک زبانه به چرخ‌دنده قفل شده است، انتقال داده می‌شود. طول زبانه ۵۰ میلی‌متر و پهنای آن ۱۲ میلی‌متر است. مطلوب است تعیین تنش برشی در زبانه.

$$F = \frac{T}{\frac{D}{۲}} = \frac{۴۵۰ (N.m)}{۰/۰۲۵ (m)} = ۱۸kN$$

$\tau = \dfrac{F}{A} = \dfrac{۱۸۰۰۰}{۵۰ \times ۱۲} = ۳۰\ N/mm^۲$

مسأله ۳-۵

۳-۶. دو تسمهٔ فولادی به ضخامت ۱۰ میلی‌متر و به پهنای ۱۵۰ میلی‌متر، توسط دو پیچ ۲۰ میلی‌متری که به‌طور کاملا کیپ درون سوراخهای خود قرار دارند، متصل شده است. اگر این اتصال یک نیروی کششی معادل ۴۵ کیلونیوتن انتقال دهد، مطلوب است: (الف) تنش متوسط قائم در ورق در مقطعی که هیچگونه سوراخی وجود ندارد (ب) تنش قائم متوسط در مقطع بحرانی (پ) تنش برشی متوسط در پیچ‌ها (ت) تنش لهیدگی متوسط بین تنه پیچها و ورق.



مسأله ۳-۶

(الف) $\sigma_{av} = \dfrac{P}{A} = \dfrac{۴۵۰۰۰}{۱۵۰ \times ۱۰} = ۳۰\ MPa$

(ب) $\sigma_{bb} = \dfrac{P}{A} = \dfrac{۴۵۰۰۰}{۱۰ \times (۱۵۰ - ۴۰)} = ۴۰/۹۱\ MPa$

(پ) $\tau = \dfrac{V}{A} = \dfrac{۴۵۰۰۰}{۲ \times \pi \times ۱۰^۲} = ۷۱/۶۲\ MPa$

(ت) $\sigma_{br} = \dfrac{P}{A} = \dfrac{۴۵۰۰۰}{۲ \times ۲۰ \times ۱۰} = ۱۱۲/۵\ MPa$

۳-۷. در مثال ۳-۲، تنش را در ۰/۵ متری پای ستون پیدا کنید. نتیجه را در روی یک جزء کوچک نمایش دهید.

$w = \dfrac{۱}{۲}(۰/۵ + ۱/۲۵) \times ۱/۵ \times ۰/۵ \times ۲۵ = ۱۶/۴۰۶\ kN$

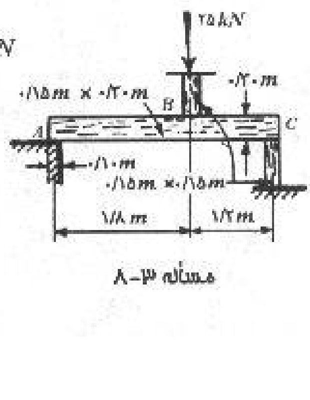
$\sigma = \dfrac{P + W}{A} = \dfrac{۵ + ۱۶/۴۰۶}{۱/۲۵ \times ۰/۵} = ۳۴/۲۵\ kN/m^۲$

۳-۸. مطلوب است تعیین تنش لهیدگی ناشی از بارهای وارده در نقاط A، B و C از سازهٔ نشان داده شده در شکل.

$\sum M_A = ۰ \quad : \quad ۲۵ \times ۱/۸ - R_c \times ۳ = ۰ \quad \Rightarrow R_c = ۱۵\ kN$

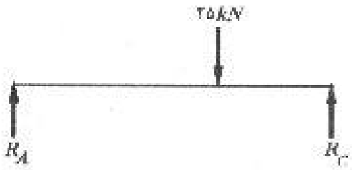
$\sum F_y = ۰ \quad : \quad R_A + R_c = ۲۵\ kN \quad \Rightarrow R_A = ۱۰\ kN$

$\sigma_A = \dfrac{۱۰\ (kN)}{۰/۱۵ \times ۰/۱\ (m)} = ۶۶۶/۶۶\ kPa$



مسأله ۳-۸

$$\sigma_B = \frac{۲۵}{۰/۱۵ \times ۰/۱۵} = ۱۱۱۱\ kPa$$

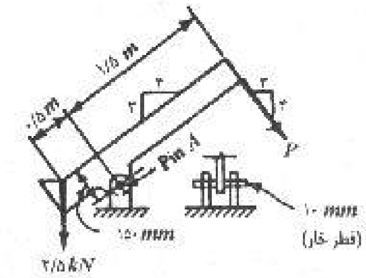


$$\sigma_c = \frac{۱۵}{۰/۱۵ \times ۰/۱۵} = ۶۶۶/۶۶\ kPa$$

۳-۹. یک اهرم که از آن برای بلند کردن پانلهای یک پل قابل حمل نظامی استفاده می‌شود، در شکل نشان داده شده است. مطلوب است تعیین تنش برشی در خار A در اثر بار ۲/۵ کیلونیوتنی

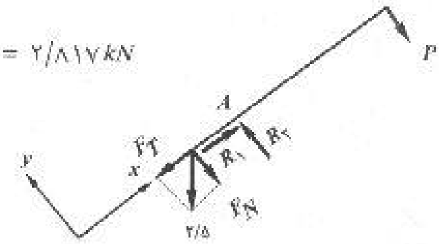
$$F_N = ۲/۵ \times \frac{۴}{۵} = ۲kN$$

$$F_T = ۲/۵ \times \frac{۳}{۵} = ۱/۵\ kN$$



مسأله ۳-۹

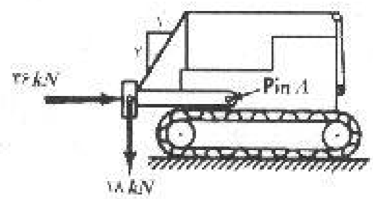
$$\sum M_A = ۰ : P \times ۱/۵ = ۲ \times ۰/۵ + ۱/۵ \times ۰/۱۵ \Rightarrow P = ۰/۸۱۷\ kN$$
$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow R_۱ = F_T = ۱/۵\ kN$$
$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow R_۲ = F_N + P \Rightarrow R_۲ = ۲ + ۰/۸۱۷ = ۲/۸۱۷\ kN$$



$$R = \sqrt{(۱/۵)^۲ + (۲/۸۱۷)^۲} \Rightarrow R = ۳/۱۹۱\ kN$$

$$\tau = \frac{R}{A} = \frac{۳۱۹۱}{۲ \times \pi \times ۵^۲} = ۲۰/۳۲\ MPa$$

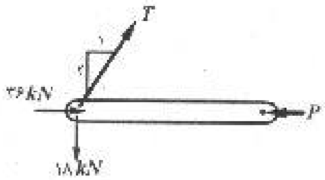
۳-۱۰. در صورتی که نیروهای وارد بر یک بولدوزر مطابق شکل باشد، مطلوب است تعیین تنش برشی در خار A. لازم به تذکر است که در هر طرف بولدوزر، یک خار به قطر ۴۰ میلی‌متر وجود دارد و خارها یک برشه می‌باشند.



مسأله ۳-۱۰

$$T \times \frac{۲}{\sqrt{۵}} = ۱۸\ kN \Rightarrow T = ۲۰/۱۲\ kN$$

$$P = ۳۶ + ۲۷ \times \frac{۱}{\sqrt{۵}} = ۴۸\,kN$$



$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۴۸۰۰۰}{\pi \times ۲۰^{۲}} = ۱۹\,MPa$$

۳-۱۱. یک میلهٔ فولادی به قطر ۲۰ میلی‌متر به‌صورت دو برشه تا لحظهٔ خرابی بارگذاری می‌شود. بار نهایی معادل ۴۵۰ کیلونیوتن اندازه‌گیری شده است. اگر تنش مجاز بر مبنای ضریب اطمینان ۴ قرار داشته باشد، قطر یک خار فولادی که برای تحمل بار مجازی معادل ۲۵ کیلونیوتن به صورت یک برشه به کار می‌رود، چقدر است.

$$\tau_{ult} = \frac{V}{A} = \frac{۴۵۰۰۰۰}{۲ \times (\pi \times ۱۰^{۲})} = ۷۱۶/۲\,MPa$$

$$\tau_{All} = \frac{\tau_{ult}}{F.S} = \frac{۷۱۶/۲}{۴} = ۱۷۹\,MPa$$

$$A = \frac{V'}{\tau_{All}} = \frac{۲۵۰۰۰}{۱۷۹} = ۱۳۹/۶\,mm^{۲} \qquad d = \sqrt{\frac{۴ \times ۱۳۹/۶}{\pi}} = ۱۳/۳\,mm$$

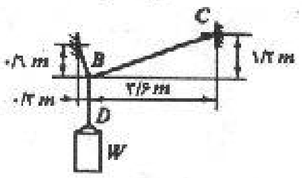
۳-۱۲. یک ستون چوبی به مقطع ۱۵۰ × ۱۵۰ میلی‌متر، نیرویی معادل ۵۰ کیلونیوتن را همانند شکل ۳-۸ به یک شالودهٔ بتنی منتقل می‌نماید. (الف) مطلوب است تعیین تنش لهیدگی بین چوب و بتن (ب) اگر فشار مجاز خاک ۱۰۰ کیلونیوتن بر متر مربع باشد، مطلوب است تعیین ابعاد شالودهٔ مربع شکل. از وزن شالوده صرف‌نظر کنید.

(الف) $\sigma_{br} = \frac{P}{A} = \frac{۵۰ \times ۱۰^{۳}}{۱۵۰ \times ۱۵۰} = ۲/۲۲\,MPa$

(ب) $A = \frac{P}{\sigma_{All}} = \frac{۵۰}{۱۰۰} = ۰/۵\,m^{۲}$

$$A = a^{۲} \Rightarrow a = \sqrt{A} = \sqrt{۰/۵} = ۰/۷۰۷\,m$$

۳-۱۳. یک مجموعهٔ سه میله‌ای (مطابق شکل)، برای حمل وزنه‌ای به جرم ۵۰۰۰ کیلوگرم به‌کار گرفته شده است. قطر میله‌های AB و BD ۲۰ میلی‌متر و قطر میلهٔ BC ۱۳ میلی‌متر می‌باشد. مطلوب است تعیین تنش در میله‌ها.



مسئله ۳-۱۳

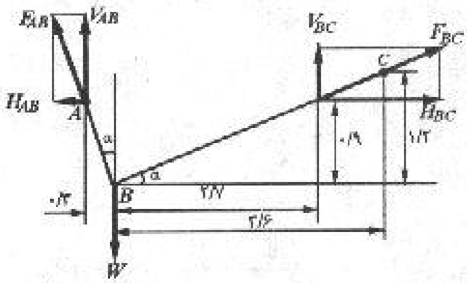
$$w = ۵۰۰۰ \times ۹/۸۱ = ۴۹۰۵۰\,N = ۴۹/۰۵\,kN$$

$$\sum M_A = ۰ \quad : \quad V_{BC} \times (۲/۷ + ۰/۳) - ۴۹/۰۵ \times ۰/۳$$

$$\Rightarrow V_{BC} = ۴/۹۰۵\,kN$$

$$\alpha = Tan^{-۱}\,\frac{۱/۲}{۳/۶} = ۱۸/۴۳ \qquad F_{BC} = \frac{V_{BC}}{Sin\,\alpha} = ۱۵/۵۱\,kN$$

$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad V_{AB} = W - V_{BC} = ۴۴/۱۴۵ kN$$



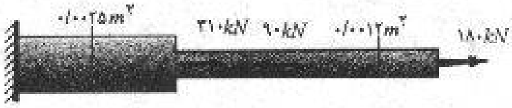
$$F_{AB} = \frac{V_{AB}}{Cos\alpha} = ۴۶/۵۳ kN$$

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}} = \frac{۴۶۵۳۰ (N)}{\pi(۱۰)^۲ (mm^۲)} = ۱۴۸ MPa$$

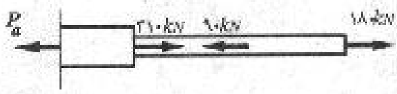
$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{۱۵۵۱۰}{\pi(۶/۵)^۲} = ۱۱۶/۸۵ MPa$$

$$\sigma_{BD} = \frac{W}{A_{BD}} = \frac{۴۹۰۵۰}{\pi(۱۰)^۲} = ۱۵۶/۱ MPa$$

۳-۱۴. یک میله با مقطع متفاوت که در یک انتها گیردار است، تحت تأثیر سه نیروی محوری مطابق شکل قرار دارد. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قایم.



مسأله ۳-۱۴



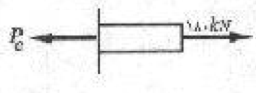
$$P_a = ۱۸۰ - ۹۰ + ۳۱۰ = ۴۰۰ kN$$

$$\sigma_a = \frac{۴۰۰ \times ۱۰^۳ (N)}{۰/۰۰۲۵ \times ۱۰^۶ (mm^۲)} = ۱۶۰ MPa$$

$$P_b = ۱۸۰ - ۹۰ = ۹۰ kN$$

$$\sigma_b = \frac{۹۰ \times ۱۰^۳}{۰/۰۰۱۲ \times ۱۰^۶} = ۷۵ MPa$$

$$P_c = ۱۸۰ kN$$



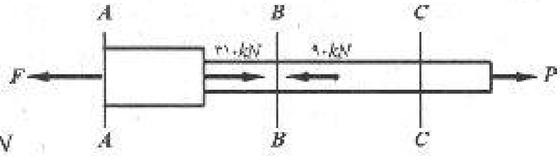
$$\sigma_c = \frac{۱۸۰ \times ۱۰^۳}{۰/۰۰۱۲ \times ۱۰^۶} = ۱۵۰ MPa$$

۳-۱۵. مثال قبل را با فرض اینکه مقدار نیروی انتهایی به جای ۱۸۰ کیلونیوتن، طوری باشد که تنش قائم حداکثر یکسانی در دو قطر میله ایجاد گردد، مجدداً حل نمایید. نیروهای محوری ۹۰ کیلونیوتنی و ۳۱۰ کیلونیوتنی دست نخورده باقی می‌مانند و حداکثر تنش قایم در ناحیهٔ نازکتر میله، هم می‌تواند بین دو نیرو و هم می‌تواند در نزدیکی انتهای آزاد باشد. هر دو حالت را بررسی کنید.

$$F = P + ۳۱۰ - ۹۰ = P + ۲۲۰$$

$$\sigma_a = \frac{P + ۲۲۰}{۰/۰۰۲۵},\ \sigma_b = \frac{P - ۹۰}{۰/۰۰۱۲},\ \sigma_c = \frac{P}{۰/۰۰۱۲}$$

حالت اوّل: $\sigma_{max} = \sigma_a = \sigma_b$



$$\frac{P + ۲۲۰}{۰/۰۰۲۵} = \frac{P - ۹۰}{۰/۰۰۱۲} \Rightarrow P = ۳۷۶\,kN$$

$$\sigma_{max} = \sigma_a = \frac{(۳۷۶ + ۲۲۰) \times ۱۰^۳\ (N)}{۲۵۰۰\ (mm^۲)} = ۲۳۸/۴\,MPa$$

$$\sigma_c = \frac{P}{۰/۰۰۱۲} = \frac{۳۷۶ \times ۱۰^۳}{۱۲۰۰} = ۳۱۳/۳\,MP$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود مقدار σ_c از σ_{max} بیشتر شده پس این حالت صحیح نمی‌باشد.

حالت دوّم: $\sigma_{max} = \sigma_a = \sigma_c$

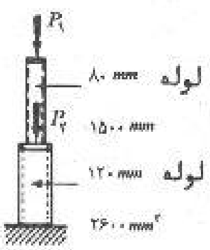
$$\frac{P + ۲۲۰}{۰/۰۰۲۵} = \frac{P}{۰/۰۰۱۲} \Rightarrow P = ۲۰۳\,kN$$

$$\sigma_{max} = \sigma_a = \frac{(۲۰۳ + ۲۲۰) \times ۱۰^۳\ (N)}{۲۵۰۰\ (mm^۲)} = ۱۶۹/۲\,MPa$$

$$\sigma_b = \frac{P - ۹۰}{۰/۰۰۱۲} = ۹۴/۲\,MPa < \sigma_{max}$$

این حالت قابل قبول است پس مقدار P برابر $۲۰۳kN$ صحیح می‌باشد

۳-۱۶. یک ستون کوتاه از دو لولهٔ فولادی که مطابق شکل در روی یکدیگر قرار دارند، ساخته شده است. اگر تنش مجاز فشاری، ۱۰۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، مطلوب است: (الف) نیروی محوری مجاز $P_۱$ اگر نیروی محوری $P_۲$ مساوی ۲۰۰ کیلونیوتن باشد. (ب)، نیروی محوری مجاز $P_۱$ اگر $P_۲ = ۸۰$ کیلونیوتن باشد. از وزن لوله‌ها صرف‌نظر کنید.



مسأله ۳-۱۶

(الف) $P_۱ = A_۱\,\sigma_{all} = ۱۵۰۰ \times ۱۰۰ = ۱۵۰\,kN$

$$P_۱ + ۲۰۰ \times ۱۰^۳ = A_۲\,\sigma_{all}$$

$$P_۱ + ۲ \times ۱۰^۵ = ۲۶۰۰ \times ۱۰۰ \Rightarrow P_۱ = ۶۰\,kN$$

پس $۶۰\,kN$ قابل قبول است زیرا اگر $P_۱$ از $۶۰\,kN$ بیشتر باشد تنش در لوله پایینی از حد مجاز فراتر خواهد رفت.

ب) $P_۱ = A_۱\, \sigma_{all} = ۱۵۰\, kN$

$$P_۱ + ۸۰۰۰۰ = ۲۶۰۰ \times ۱۰۰ \Rightarrow P_۱ = ۱۸۰\, kN$$

در این حالت مقدار $۱۵۰\, kN$ قابل قبول می‌باشد زیرا با گذشتن از مرز $۱۵۰\, kN$ تنش در لوله بالایی از تنش مجاز فراتر می‌رود.

۳-۱۷. مثال قبل را با فرض اینکه جهت $P_۱$ معکوس شود، مجدداً حل نمایید (به عبارت دیگر، نیروی $P_۱$ در این حالت کششی است). فرض کنید که تنش کششی مجاز نیز ۱۰۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.

الف) $P_۱ = A_۱\, \sigma_{all} = ۱۵۰\, kN$

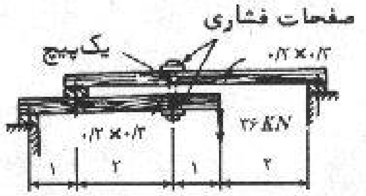
$$P_۱ - ۲۰۰۰۰۰ = ۲۶۰۰ \times ۱۰۰ \Rightarrow P_۱ = ۴۶۰\, kN$$

ب) $P_۱ = ۱۵۰\, kN$

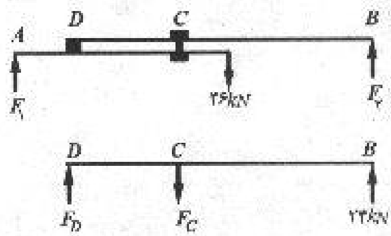
$$P_۱ - ۸۰۰۰۰ = ۲۶۰۰ \times ۱۰۰ \Rightarrow P_۱ = ۳۴۰\, kN$$

در هر دو حالت جواب $۱۵۰\, kN$ قابل قبول می‌باشد.

۳-۱۸. مطلوب است تعیین اندازهٔ پیچ و سطح صفحات فشاری برای سازهٔ نشان داده شده در شکل، در صورتی که تنش مجاز کششی ۱۲۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع و تنش مجاز لهیدگی ۳/۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد از وزن تیرها صرف‌نظر کنید.



(تمام ابعاد برحسب متر) مسئله ۳-۱۸



$$\sum M_B: \quad F_۱ \times ۶ = ۳۶ \times ۲ \Rightarrow F_۱ = ۱۲ kN$$

$$\sum F_A: \quad F_۲ \times ۶ = ۳۶ \times ۴ \Rightarrow F_۲ = ۲۴ kN$$

$$\sum M_D: \quad ۲۴ \times ۵ = F_c \times ۲ \Rightarrow F_c = ۶۰ kN$$

$$\sigma = \frac{F_c}{A} \to A = \frac{F_c}{\sigma} = \frac{۶۰۰۰۰}{۱۲۵} = ۴۸۰\, mm^۲$$

$$A = \frac{\pi d^۲}{۴} \to d = \sqrt{\frac{۴A}{\pi}} = ۲۴/۷$$

اگر بخواهیم از پیچهای متریک استاندارد استفاده کنیم قطرهای ۲۴ و ۲۷ میلی‌متر موجود می‌باشند که باید قطر ۲۷ میلی‌متر را بکار ببریم و یا می‌توانیم از پیچ با قطر ۱ اینچ که معادل ۲۵/۴ میلی‌متر می‌باشد استفاده کنیم

سطح صفحات فشاری:

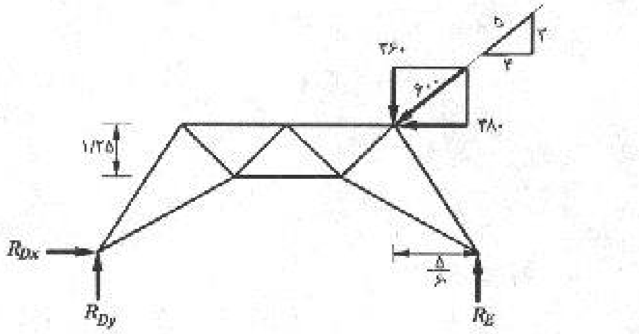
$$A = \frac{F_c}{\sigma_{br}} = \frac{۶۰۰۰۰}{۳/۵} = ۱۷۱۴۲/۸\, mm^۲$$

۳-۱۹. مثال ۳-۶ را با تجدیدنظر در داده‌ها به صورت زیر، مجدداً حل نمایید، ارتفاع کل خرپا مساوی ۲/۵ متر و دهانهٔ آن مساوی ۵ متر و بار وارده مساوی ۶۰۰ کیلونیوتن می‌باشد. تنش کششی مجاز را ۱۴۰ مگاپاسکال (نیوتن بر میلی‌مترمربع) در نظر بگیرید.

$$P_x = ۶۰۰ \times \frac{۴}{۵} = ۴۸۰\ kN$$

$$P_y = ۶۰۰ \times \frac{۳}{۵} = ۳۶۰\ kN$$

$$\sum F_x = ۰ :\ R_{Dx} = ۴۸۰\ kN$$

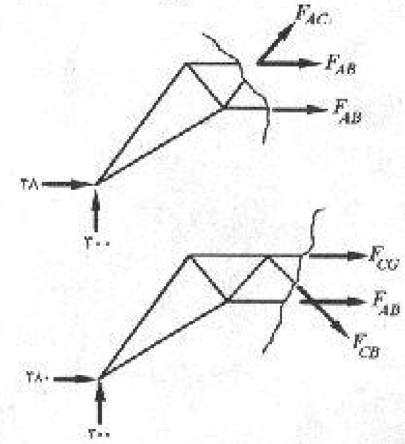


$$\sum M_E = ۰ :\ R_{Dy} \times ۵ - ۴۸۰ \times ۰ - ۴۸۰ \times ۲/۵ - ۳۶۰ \times \frac{۵}{۶} = ۰ \Rightarrow R_{Dy} = ۳۰۰\ kN$$

$$\sum F_y = ۰ \quad :\quad R_{Dy} + R_E = ۳۶۰ \Rightarrow R_E = ۶۰\ kN$$

$$\sum M_A = ۰)+ :\ F_{Fc} \times ۱/۲۵ + ۳۰۰ \times \frac{۱۰}{۶} - ۴۸۰ \times ۱/۲۵ = ۰ \Rightarrow F_{Fc} = ۸۰\ kN$$

$$A_{Fc} = \frac{F_{Fc}}{\sigma_{all}} = \frac{۸۰ \times ۱۰^۳}{۱۴۰} = ۵۷۱/۴۳ mm^۲$$



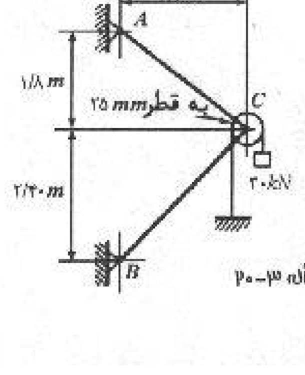
$$\sum F_y = ۰ \quad :\quad (F_{CB})_y = ۳۰۰\ kN$$

$$\sqrt{\left(\frac{۵}{۶}\right)^۲ + ۱/۲۵^۲} = ۱/۵$$

$$F_{CB} = \frac{۱/۵}{۱/۲۵} \times (F_{CB})_y = ۳۶۰\ kN$$

$$A_{CB} = \frac{۳۶۰ \times ۱۰^۳}{۱۴۰} = ۲۵۷۱/۴\ mm^۲$$

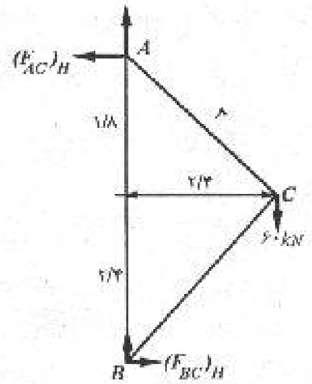
۳-۲۰. وزنهٔ ۳۰ کیلونیوتنی توسط یک قرقره، مطابق شکل نگاه داشته می‌شود. قرقره نیز به نوبهٔ خود توسط قاب ABC حمل می‌گردد. مطلوب است تعیین سطح مقطع لازم میله‌های AC و BC در صورتی که تنش مجاز کششی ۱۴۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع و تنش مجاز فشاری ۹۶ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد. تنش مجاز فشاری با توجه به اصول فصل چهارده تعیین شده است.



مسئلهٔ ۳-۲۰

$$\sum M_B = ۰ \ : (F_{AC})_H \times ۴/۲ - ۶۰ \times ۲/۴ = ۰$$

$$\Rightarrow (F_{AC})_H = ۳۴/۲۹$$



$$F_{AC} = \frac{۳}{۲/۴} \times ۳۴/۲۹ = ۴۲/۸۵ kN$$

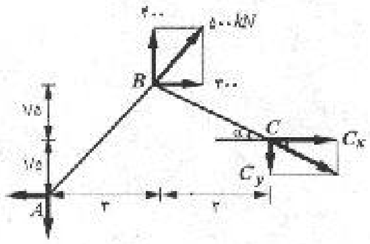
$$A_{AC} = \frac{F_{AC}}{\sigma} = \frac{۴۲۸۵۰}{۱۴۰} = ۳۰۶ mm^۲$$

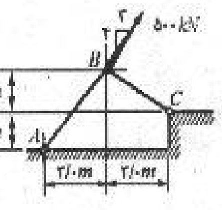
$$\sum F_x = ۰ \ : (F_{BC})_H = ۳۴/۲۹$$

$$\Rightarrow F_{BC} = ۳۴/۲۹ \times \sqrt{۲} = ۴۸/۴۹$$

$$A_{BC} = \frac{F_{BC}}{\sigma} = \frac{۴۸۴۹۰}{۹۶} = ۵۰۵ mm^۲$$

۳-۲۱. یک نیروی ۵۰۰ کیلونیوتنی به گرهٔ B از یک سیستم دو میله‌ای با گره‌های مفصلی (مطابق شکل) وارد می‌گردد. مطلوب است تعیین سطح مقطع لازم میلهٔ BC در صورتی که تنش مجاز کششی ۱۰۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع و تنش مجاز فشاری ۷۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد.





مسئله ۳-۲۱

$$\circlearrowright + \sum M_A = ۰ \quad : c_y \times ۶ - C_x \times ۱/۵ + ۳۰۰ \times ۳ - ۴۰۰ \times ۳ = ۰ \qquad (۱)$$

از طرفی با توجه به هندسه شکل:

$$C_x = ۲C_y \qquad (۲)$$

با جایگزینی معادله (۲) در معادله (۱) مقدار C_y بدست می‌آید.

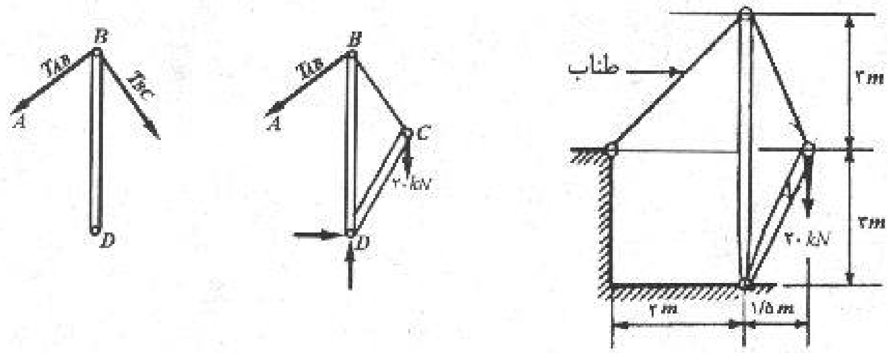
$$C_y = ۳۳/۳۳ kN$$

علامت C_y مثبت بدست آمده و با توجه به جهت انتخاب شده برای آن مشخص می‌شود که نیروی عضو BC از نوع کششی می‌باشد بنابراین برای طراحی از تنش مجاز کششی استفاده می‌شود.

$$F_{BC} = \frac{\sqrt{۱/۵^۲ + ۳^۲}}{۱/۵} \times C_y = ۷۴/۵ kN$$

$$A_{BC} = \frac{F_{BC}}{\sigma} = \frac{۷۴۵۰۰}{۱۰۰} = ۷۴۵ mm^۲$$

۳-۲۲. مطلوب است تعیین تنش در اعضای فشاری دکل نشان داده شده در شکل. تمام اعضا در یک صفحه قرار دارند و اتصالات آنها مفصلی است. اعضای فشاری از لوله‌هایی به قطر ۲۰۰ میلی‌متر و سطح مقطع ۶۰۰۰ میلی‌مترمربع تشکیل شده‌اند. از وزن اعضا صرف‌نظر کنید.



مسئله ۳-۲۲

$$\circlearrowleft + \sum M_D = ۰ : ۲۰ \times ۱/۵ - \frac{۳}{\sqrt{۳^۲ + ۳^۲}} T_{AB} \times ۶ = ۰ \Rightarrow T_{AB} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} kN$$

$$\circlearrowleft + \sum M_D = ۰ : \frac{۱/۵}{\sqrt{۳^۲ + ۱/۵^۲}} T_{BC} \times ۶ - \frac{۳}{\sqrt{۳^۲ + ۳^۲}} T_{AB} \times ۶ = ۰ \Rightarrow T_{BC} = ۱۱/۱۸ kN$$

گره C : $\sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{CD} = T_{BC} = ۱۱/۱۸ kN$

میله BD : $\sum F_y = ۰ : F_{BD} - \frac{۳}{\sqrt{۱۸}} T_{AB} - \frac{۳}{\sqrt{۱۱/۲۵}} T_{BC} = ۰ \Rightarrow F_{BD} = ۱۵ kN$

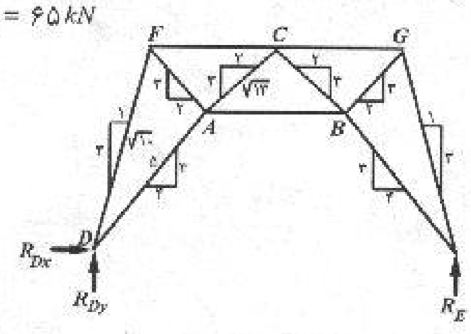
$$\sigma_{BD} = \frac{F_{BD}}{A} = \frac{۱۵۰۰۰}{۶۰۰۰} = ۲/۵ MPa$$

$$\sigma_{DC} = \frac{F_{DC}}{A} = \frac{۱۱۱۸۰}{۶۰۰۰} = ۱/۸۶ MPa$$

۳-۲۳. مطلوب است تعیین مساحت سطح مقطع کلیه اعضای کششی مثال ۳-۶. تنش مجاز کششی مساوی ۱۴۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.

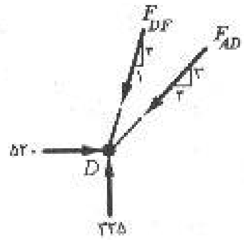
$R_{Dx} = ۵۲۰ kN$ و $R_{Dy} = ۳۲۵ kN$ و $R_E = ۶۵ kN$

$F_{FC} = ۸۶/۷ kN \qquad F_{CB} = ۳۹۱ kN$



گره D:

$$\sum F_x = ۰ : ۵۲۰ - F_{DF}\left(\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\right) - F_{AD}\left(\frac{۴}{۵}\right) = ۰$$



$$\sum F_y = ۰ : ۳۲۵ - F_{DF}\left(\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\right) - F_{AD}\left(\frac{۳}{۵}\right) = ۰$$

از حل معادلات فوق خواهیم داشت: $F_{AD} = ۶۸۶\,kN$ و $F_{DF} = -۹۱/۴\,kN$

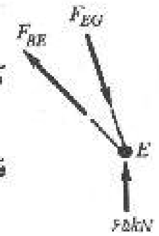
جهت نیروی F_{DF} خلاف جهتی است که در نظر گرفته‌ایم یعنی F_{DF} کششی می‌باشد.

گره E:

$$\sum F_x = ۰ : -F_{BE}\left(\frac{۴}{۵}\right) + F_{EG}\left(\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\right) = ۰$$

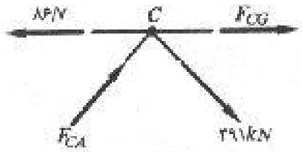
$$\Rightarrow \begin{cases} F_{BE} = ۳۶/۱kN \text{ کششی} \\ F_{EG} = ۹۱/۴kN \text{ فشاری} \end{cases}$$

$$\sum F_y = ۰ : ۶۵ - F_{EG}\left(\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\right) + F_{BE}\left(\frac{۳}{۵}\right) = ۰$$



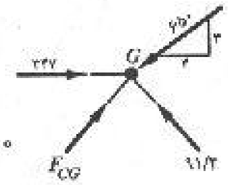
گره C:

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow F_{CA} = ۳۹۱\,kN$$



$$\sum F_x = ۰ : F_{CG} + \left(\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}\right)۳۹۱ \times ۲ - ۸۶/۷ = ۰ \Rightarrow F_{CG} = -۳۹۷kN \text{ فشاری}$$

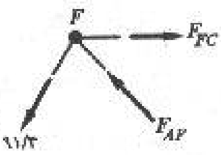
گره G:



$$\sum F_x = ۰ : ۳۴۷ + F_{GB}\left(\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}\right) - ۹۱/۴\left(\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\right) - ۶۵۰\left(\frac{۴}{۵}\right) = ۰$$

$\Rightarrow F_{CB} = ۳۶۴kN$ فشاری

گره F:

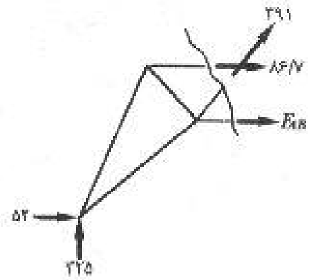


$$\sum F_y = ۰ : F_{AF}\left(\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}\right) - ۹۱/۴\left(\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\right) = ۰ \Rightarrow F_{AF} = ۱۰۴/۲ \text{ فشاری}$$

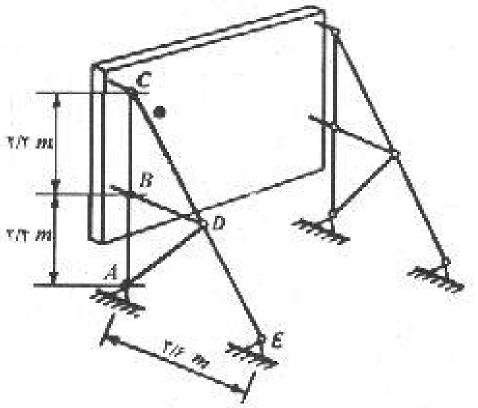
$$\sum F_x = ۰ : ۵۲۰ + ۸۶/۷ + F_{AF} - ۳۹۱\left(\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}\right) = ۰ \Rightarrow F_{AB} = -۳۹۰$$ فشاری

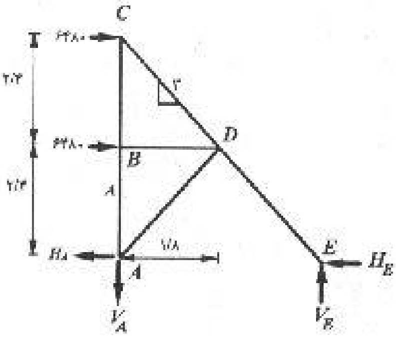
$$A_{DF} = \frac{F_{DF}}{\sigma_{all}} = \frac{۹۱۴۰۰}{۱۴۰} = ۶۵۰\, mm^۲$$

$$A_{BE} = \frac{F_{BE}}{\sigma_{all}} = \frac{۳۶۱۰۰}{۱۴۰} = ۲۶۰\, mm^۲$$



۳-۲۴. یک تابلو علایم راهنمایی و رانندگی به ابعاد ۶ × ۴/۵ متر توسط دو قاب مطابق شکل نگهداری می‌شود. سطح مقطع کلیهٔ اعضای قاب ۱۰۰ × ۵۰ میلی‌متر می‌باشد. مطلوب است محاسبهٔ تنش در اعضای قاب در اثر فشار افقی باد معادل ۹۶۰ نیوتن بر مترمربع که بر روی تابلو وارد می‌گردد. فرض کنید که تمام اتصالات مفصلی می‌باشند و $\frac{۱}{۴}$ کل نیروی باد بر نقاط B و C وارد می‌شود. از کمانش احتمالی اعضای فشاری و همچنین وزن سازه صرف‌نظر کنید.





مسئله ۳-۲۴

$$F = \frac{۴/۵ \times ۶ \times ۹۶۰}{۴} = ۶۴۸۰\, N$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = ۰ : V_E \times ۳/۶ - ۶۴۸۰ \times ۴/۸ - ۶۴۸۰ \times ۲/۴ = ۰ \Rightarrow V_E = ۱۲۹۶۰\, N$$

$$H_E = \frac{۱/۸}{۲/۴}\, ۱۲۹۶۰ = ۹۷۲۰\, N$$

$$\sum F_y = ۰ : V_E - V_A = ۰ \Rightarrow V_A = ۱۲۹۶۰$$

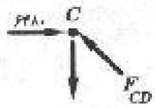
$$\circlearrowright + \sum M_D = ۰ : ۶۴۸۰ \times ۲/۴ + H_A \times ۲/۴ - ۱۲۹۶۰ \times ۱/۸ = ۰ \Rightarrow H_A = ۳۲۴۰\, N$$

$$F_{ED} = \sqrt{H_E^۲ + V_E^۲} = ۱۶۲۰۰\, N \qquad \sigma_{ED} = \frac{۱۶۲۰۰}{۱۰۰ \times ۵۰} = ۳/۲۴\, MPa$$

گره C:

$$\frac{۱/۸}{۳} \times F_{CD} = ۶۴۸۰ \Rightarrow F_{CD} = ۱۰۸۰۰ N$$

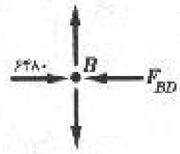
$$\sigma_{CD} = \frac{۱۰۸۰۰}{۱۰۰ \times ۵۰} = ۲/۱۶ MPa$$



گره B:

$$\sum F_x = ۰ : F_{BD} = ۶۴۸۰ N$$

$$\sigma_{BD} = \frac{۶۴۸۰}{۱۰۰ \times ۵۰} = ۱/۳ MPa$$



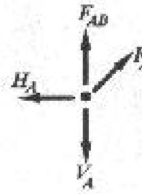
گره A:

$$\sum F_x = ۰ : \frac{۱/۸}{۳} \times F_{AD} = H_A \Rightarrow F_{AD} = ۵۴۰۰ N$$

$$\sigma_{AD} = \frac{۵۴۰۰}{۱۰۰ \times ۵۰} = ۱/۰۸ MPa$$

$$\sum F_y = ۰ : F_{AB} + \frac{۲/۴}{۳} F_{AD} - V_A = ۰ \Rightarrow F_{AB} = ۸۶۴۰$$

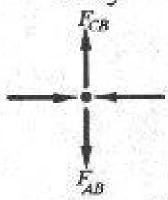
$$\sigma_{AB} = \frac{۸۶۴۰}{۱۰۰ \times ۵۰} = ۱/۷۳ MPa$$



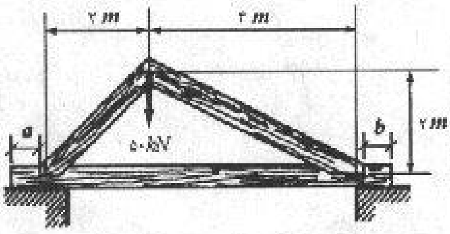
گره B:

$$\sum F_y = ۰ : F_{CB} = ۸۶۴۰ N$$

$$\sigma_{CB} = \frac{۸۶۴۰}{۱۰۰ \times ۵۰} = ۱/۷۳ MPa$$



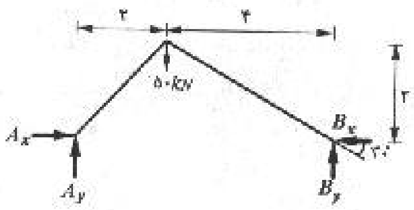
۳-۲۵. مطلوب است تعیین فواصل لازم a و b در خرپای نشان داده شده در شکل. ابعاد سطح مقطع تمام اعضا، ۰/۲ × ۰/۲ متر می‌باشد. مقاومت برشی نهایی چوب در موازات الیاف آن ۳/۵ نیوتن بر میلی متر مربع می‌باشد. از ضریب اطمینان ۵ استفاده نمایید. (چنین طرحی هیچ‌وقت توصیه نمی‌شود.)



مسأله ۳-۲۵

$$\circlearrowright + \sum M_A = ۰ : ۵۰ \times ۲ - B_y \times ۶ = ۰ \Rightarrow B_y = \frac{۵۰}{۳} kN$$

$$B_x = \frac{B_y}{tan۳۰} = ۱/۷۳ B_y = ۲۸/۸۷$$



$$\sum F_x = ۰ : A_x - ۲۸/۸۷ = ۰ \Rightarrow A_x = ۲۸/۸۷\,kN$$

$$\tau_{all} = \frac{A_x}{a.t} \Rightarrow a = \frac{A_x}{\tau.t} = \frac{۲۸۸۷۰ (N)}{\frac{۳/۵}{۵} (N/mm^۲) \times ۲۰۰\ (mm)} = ۲۰۶/۲\,mm$$

$$\tau_{all} = \frac{B_x}{b.t}$$

با توجه به یکسان بودن همه مقادیر برای طرف دیگر تیر مقدار b لازم نیز $۲۰۶\,mm$ خواهد بود

۳-۲۶. مطلوب است تعیین قطر خار B برای مکانیسم نشان داده شده در شکل. تنش برشی مجاز مساوی ۱۰۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.

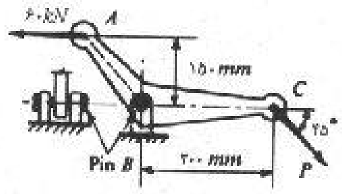
$$\sum M_B = ۰ \quad P_y \times ۳۰۰ - ۶۰ \times ۱۵۰ = ۰$$

$$P_y = ۳۰\,kN$$

$$\theta = ۴۵^\circ \Rightarrow P_x = P_y = ۳۰\,kN$$

$$\sum F_y = ۰ : B_y = P_y = ۳۰\,kN$$

$$\sum F_x = ۰ \quad B_x + P_x - ۶۰ = ۰ \Rightarrow B_x = ۳۰\,kN$$

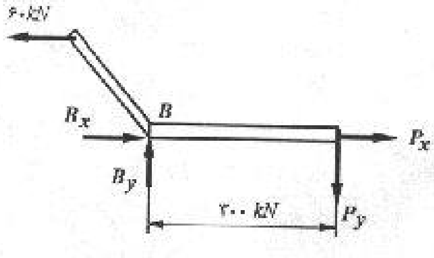


مسئله ۳-۲۶

$$R_B = \sqrt{۳۰^۲ + ۳۰^۲} = ۳۰\sqrt{۲}$$

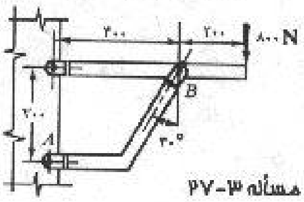
$$A = \frac{R_B}{\sigma_{all}} = \frac{۳۰۰۰۰\sqrt{۲}\ (N)}{۱۰۰} = ۴۲۴/۳\,mm^۲$$

$$d = \left(\frac{۴A}{\pi}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ۲۳/۲\,mm$$

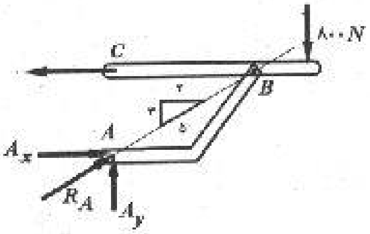


۳-۲۷. مطلوب است تعیین تنش برشی در پیچ A در سازهٔ نشان داده شده در شکل. قطر پیچ مساوی ۶ میلی‌متر می‌باشد و به صورت دو برشه عمل می‌کند. تمام ابعاد بر حسب میلی‌متر می‌باشند.

$$\sum M_c = ۰ \quad : A_x \times ۳۰۰ = ۸۰۰ \times ۶۰۰ \Rightarrow A_x = ۱۶۰۰\,N$$



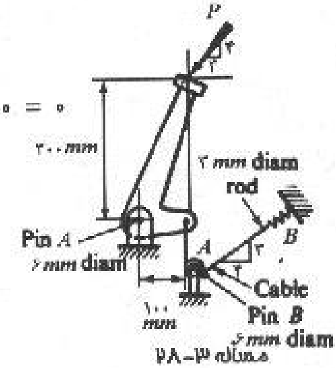
مسئله ۳-۲۷



عضو AB یک عضو دو نیرویی است، بنابراین امتداد نیروی برایند تکیه‌گاه A از نقطه B عبور می‌کند. در این‌صورت داریم: $R_A = \frac{۵}{۴}A_x = ۲۰۰۰\,N$

$$\tau_A = \frac{۲۰۰۰}{\pi(۳)^۲} = ۳۵/۳۷\,MPa$$

۳-۲۸. یک سیستم پدال برای به کار انداختن یک مکانیسم فنر در شکل نشان داده شده است. مطلوب است تعیین تنشهای برشی در خارهای A و B در اثر نیروی P به‌طوری که این نیرو تولید تنشی معادل ۷۰ مگاپاسکال در میلهٔ AB بکند. تمام خارها به صورت دو برشی عمل می‌نمایند.



مسئله ۳-۲۸

$$F_{AB} = \sigma A = ۷۰ \times \pi \times (۱/۵)^۲ = ۴۹۴/۸\,N$$

$$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ : -\frac{۳}{۵}P \times ۳۰۰ + \frac{۴}{۵}P \times ۱۰۰ + F_{AB} \times ۱۰۰ = ۰$$

از حل معادله فوق: $P = ۴۹۴/۸\,N$

$$\sum F_x = ۰ : A_x = \frac{۳}{۵}P = ۲۹۶/۹\,N$$

$$\sum F_y = ۰ : A_y = \frac{۴}{۵}P + F_{AB} = ۸۹۰/۶۴\,N$$

$$R_A = \sqrt{A_x^۲ + A_y^۲} = ۹۳۸/۸\,N$$

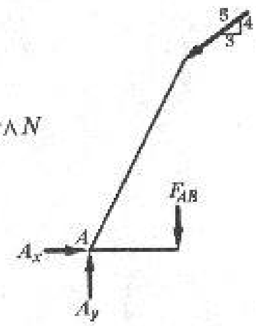
$$\tau_A = \frac{۹۳۸/۸}{۲ \times \pi \times ۳^۲} = ۱۶/۶\,MPa$$

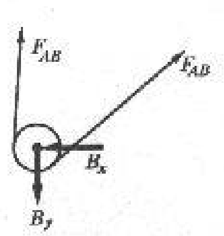
$$\sum F_x = ۰ : B_x = \frac{۴}{۵}F_{AB} = ۳۹۵/۸۴\,N$$

$$\sum F_y = ۰ : B_y = F_{AB} + \frac{۳}{۵}F_{AB} = ۷۹۱/۶۸\,N$$

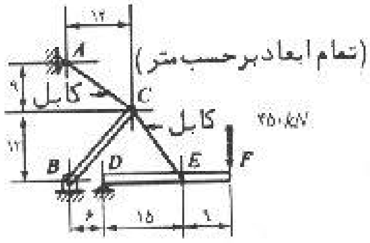
$$R_B = \sqrt{B_x^۲ + B_y^۲} = ۸۸۵/۱۳\,N$$

$$\tau_B = \frac{۸۸۵/۱۳}{\pi \times ۳^۲} = ۳۱/۳\,MPa$$

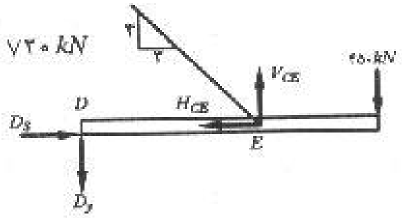




۳-۲۹. یک تیر که نیرویی معادل ۴۵۰ کیلونیوتن در یک انتهای آن تأثیر می‌نماید، توسط یک سازهٔ کابلی مطابق شکل نگه داشته شده است. مطلوب است تعیین مؤلفه‌های افقی و قائم واکنشهای A، B و D. اگر تنش مجاز کششی ۱۴۰ نیوتن بر میلی مترمربع و تنش مجاز فشاری ۷۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، مساحت لازم برای سطح مقطع اعضای AC، BC، CE را تعیین نمایید. (راهنمایی: ابتدا تیر DF را جدا نمائید).



مسئله ۳-۲۹



$$\sum M_D = 0 : V_{CE} \times 15 - 450 \times 24 = 0 \Rightarrow V_{CE} = 720\,kN$$

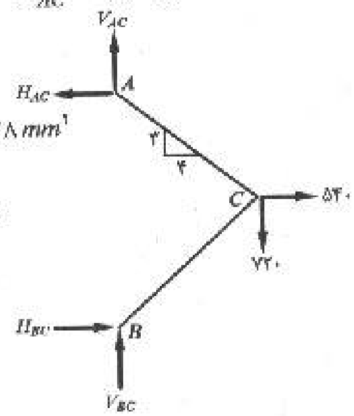
$$H_{CE} = \frac{3}{4} V_{CE} = 540\,kN$$

$$\sum F_x = 0 : D_x = H_{CE} = 540\,kN$$

$$\sum F_y = 0 : D_y + 450 - 720 = 0 \Rightarrow D_y = 270\,kN$$

$$F_{CE} = \frac{5}{3} \times 540 = 900\,kN \qquad A_{CE} = \frac{900 \times 10^3}{140} = 6428\,mm^2$$

$$\sum M_B = 0 : 720 \times 12 + 540 \times 12 - H_{AC} \times 21 = 0 \Rightarrow H_{AC} = 720\,kN$$



$$V_{AC} = \frac{3}{4} H_{AC} = 540\,kN$$

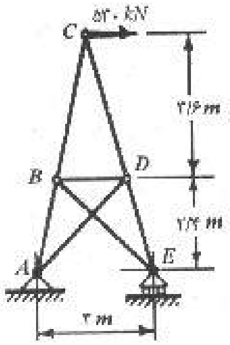
$$F_{AC} = \sqrt{V_{AC}^2 + H_{AC}^2} = 900\,kN ، A_{AC} = \frac{900 \times 10^3}{140} = 6428\,mm^2$$

$$\sum F_x = 0 : H_{BC} - 720 + 540 = 0 \qquad H_{BC} = 180\,kN$$

$$\sum F_y = 0 : V_{BC} - 720 + 540 = 0 \qquad V_{BC} = 180\,kN$$

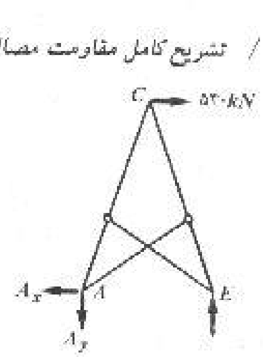
$$F_{BC} = 180\sqrt{2}\,kN$$

$$A_{BC} = \frac{180\sqrt{2} \times 10^3}{70} = 3636.6\,mm^2$$



مسئله ۳-۳۰

۳-۳۰. دکل نشان داده شده در شکل، تحت تأثیر نیروی افقی ۵۴۰ کیلونیوتن قرار دارد. اگر تنش مجاز کششی ۱۴۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع و تنش مجاز فشاری ۱۰۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، سطح مقطع لازم اعضای دکل را معین کنید. تمام اتصالات مفصلی و تمام ابعاد نشان داده شده برحسب متر می‌باشند.



$$\sum M_A = ۰ : ۵۴۰ \times ۶ - E \times ۳ = ۰ \Rightarrow E = ۱۰۸۰\, kN$$

$$\sum F_y = ۰ : A_y = ۱۰۸۰\, kN$$

$$\sum F_x = ۰ : A_x = ۵۴۰\, kN$$

پس از بدست آوردن نیروهای مربوط به اعضاء سازه نتایج زیر حاصل می‌شود

$F_{AB} = ۷۴۲/۲ kN$ کششی $\quad F_{BC} = ۱۱۱۳/۲ kN$ کششی

$F_{BE} = ۵۰۹/۱ kN$ کششی $\quad F_{AD} = ۵۰۹/۱ kN$ کششی

$F_{BD} = ۴۵۰\, kN$ فشاری $\quad F_{CB} = ۱۱۱۳/۲ kN$ فشاری

$F_{DE} = ۱۲۸۴/۳ kN$ فشاری

با توجه به تنش مجاز در حالت کشش و فشار می‌توان سطوح اعضاء را محاسبه نمود.

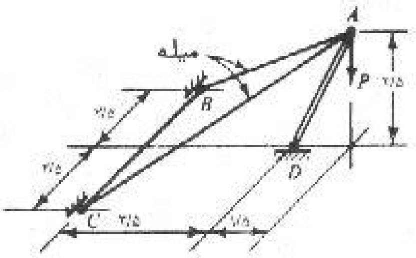
$$A_{AB} = \frac{۷۴۲/۲ \times ۱۰^۳}{۱۴۰} = ۵۳۰۱/۴ mm^۲ \qquad A_{BC} = \frac{۱۱۱۳/۲ \times ۱۰^۳}{۱۴۰} = ۷۹۵۱/۴ mm^۲$$

$$A_{BE} = \frac{۵۰۹/۱ \times ۱۰^۳}{۱۴۰} = ۳۶۳۶/۴ mm^۲ \qquad A_{AD} = \frac{۵۰۹/۱ \times ۱۰^۳}{۱۴۰} = ۳۶۳۶/۴ mm^۲$$

$$A_{BD} = \frac{۴۵۰ \times ۱۰^۳}{۱۰۰} = ۴۵۰۰\, mm^۲ \qquad A_{CB} = \frac{۱۱۱۳/۲ \times ۱۰^۳}{۱۰۰} = ۱۱۱۳۲۰\, mm^۲$$

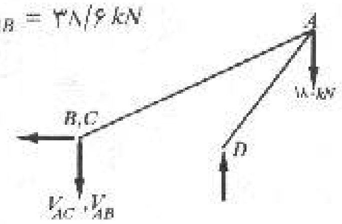
$$A_{DE} = \frac{۱۴۸۴/۳ \times ۱۰^۳}{۱۰۰} = ۱۴۸۴۳ mm^۲$$

۳-۳۱. مطلوب است تعیین قطر لازم میله‌های AB و AC از سازهٔ فضایی نشان داده شده در شکل که برای حمل بار $P = ۱۸۰$ کیلونیوتن به کار گرفته شده است. تمام اتصالات مفصلی می‌باشد و از وزن مردهٔ سازه صرف‌نظر نمایید. تنش مجاز کششی مساوی ۱۲۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع و تمام ابعاد نشان داده شده بر حسب متر می‌باشد.



$$V_{AB} = V_{AC}$$

$$\sum M_D = ۰ : ۲V_{AB} \times ۳/۵ - ۱۸۰ \times ۱/۵ = ۰ \Rightarrow V_{AB} = ۳۸/۶\,kN$$



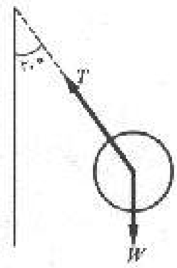
$$AB = \sqrt{(۲/۵)^۲ + (۵)^۲ + (۳/۵)^۲} = ۶/۵۹\,m$$

$$F_{AB} = F_{AC} = \frac{۶/۵۹}{۳/۵} \times V_{AB} = ۷۲/۷\,kN$$

$$A_{AB} = A_{AC} = \frac{F_{AB}}{\sigma_{all}} = \frac{۷۲۷۰۰}{۱۲۵} = ۵۸۱/۶\,mm^۲ \qquad d = \sqrt{\frac{۴A}{\pi}} = ۲۷/۲\,mm$$

۳-۳۲. یک جرم ۵ کیلوگرمی که به انتهای یک سیم به طول ۱/۵ متر بسته شده است، در روی یک دایرهٔ افقی با چنان سرعت زاویه‌ای حرکت می‌کند که سیم زاویه‌ای مساوی ۳۰ درجه با خط قایم می‌سازد. اگر تنش مجاز کششی سیم که از فولاد اعلا ساخته شده، مساوی ۳۰۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، قطر سیم را تعیین کنید.

$$T \cos ۳۰^\circ = W \Rightarrow T = \frac{۵ \times ۹/۸۱}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = ۵۶/۶۴\,N$$

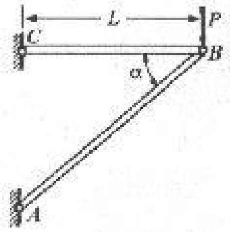


$$A = \frac{T}{\sigma_{all}} = \frac{۵۶/۶۴}{۳۰۰} = ۰/۱۹\,mm^۲$$

$$d = \sqrt{\frac{۴A}{\pi}} = ۰/۴۹\,mm$$

۳-۳۳. یک قاب مفصلی که نیروی P را در گرهٔ B حمل می‌کند، در شکل نشان داده شده است. تنش قائم σ باید در هر دو عضو AB و BC یکسان باشد. مطلوب است تعیین زاویه α به طوری که وزن این سازه حداقل باشد. اعضای AB و BC دارای سطح مقطع ثابتی می‌باشند.

$$F_{BC} = P \,\mathrm{Cotg}\,\alpha \qquad A_{BC} = \frac{F_{BC}}{\sigma} = \frac{P}{\sigma}\,\mathrm{Cotg}\,\alpha$$



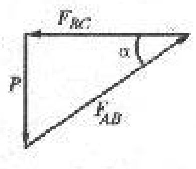
مسأله ۳-۳۳

$$F_{AB} = \frac{P}{\sin\alpha} \qquad A_{AB} = \frac{F_{AB}}{\sigma} = \frac{P}{\sigma}\,\frac{۱}{\sin\alpha}$$

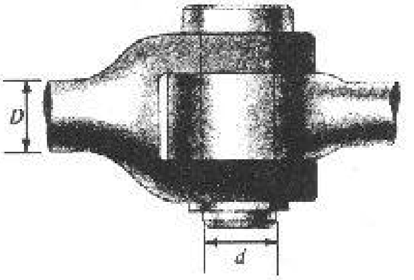
$$(\text{حجم})\; V = A_{BC}\,L + A_{AB}\,L_{AB} \quad \text{و} \quad L_{AB} = \frac{L}{\cos\alpha}$$

$$V = \frac{PL}{\sigma}\left(\mathrm{Cotg}\,\alpha + \frac{۱}{\sin\alpha\,\cos\alpha}\right)$$

$$\frac{dV}{d\alpha} = ۰ \rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱}{۳} \rightarrow \alpha = ۵۵^\circ$$



۳-۳۴. اتصال مفصلی نشان داده شده در شکل برای حمل یک نیروی کششی به کار گرفته می‌شود. اگر قطر میله D باشد، قطر d خار را تعیین کنید. تنش برشی مجاز خار نصف تنش کششی مجاز میله می‌باشد.



مسأله ۳-۳۴

$$\sigma = \frac{P}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)} = P\,\frac{4}{\pi D^2} \quad \text{و} \quad \tau = \frac{P/2}{\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)} = \frac{P}{2}\cdot\frac{4}{\pi d^2}$$

بنابر فرض مسأله $\tau = \frac{\sigma}{2}$ بنابراین:

$$\frac{P}{2}\cdot\frac{4}{\pi d^2} = \frac{1}{2}\left(P\cdot\frac{4}{\pi D^2}\right) \Rightarrow d = D$$

مسائل فصل چهارم

۴ـ۱. یک نمونهٔ آزمایشی استاندارد فولادی به قطر ۱۳ میلی‌متر، به اندازهٔ ۰/۲۲ میلی‌متر در طول مقیاس ۲۰۰ میلی‌متری، تحت اثر نیروی کششی ۲۹/۵ کیلو نیوتن، افزایش طول پیدا کرده است. در صورتی که در طی آزمایش، نمونه فولادی از حد ارتجاعی خارج نشده باشد، مطلوب است تعیین ضریب ارتجاعی فولاد.

$$\delta = \frac{PL}{AE} \Rightarrow E = \frac{PL}{A\delta} \Rightarrow E = \frac{(29/5 \times 10^{3}) \times 200}{\frac{\pi}{4}\,(13)^2 \times 0/22} \Rightarrow \boxed{E = 2/02 \times 10^{5}\ MPa}$$

۴ـ۲. یک میلهٔ فولادی به طول ۱۰ متر در یک مکانیسم کنترل به کار رفته است. نیروی کششی وارد بر میله در مکانیسم مورد نظر، ۵ کیلو نیوتن می‌باشد. در صورتی که حداکثر تغییر شکل مجاز میله ۳ میلی‌متر و تنش مجاز آن ۱۵۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، مطلوب است تعیین حداقل قطر لازم برای میله. ضریب ارتجاعی فولاد را 2×10^{5} نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.

سطح لازم از نظر تنش مجاز:

$$\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow A = \frac{5 \times 10^{3}}{150} = 33/33\,mm^2$$

سطح لازم از نظر تغییر شکل مجاز:

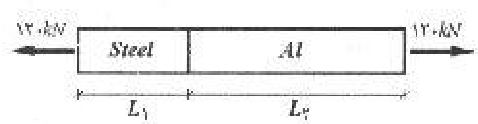
$$A = \frac{PL}{\delta E} = \frac{5 \times 10^{3} \times 10^{4}}{3 \times 2 \times 10^{5}} = 83/33\,mm^2$$

از بین مقادیر بدست آمده برای سطح، مقدار بزرگتر را انتخاب می‌کنیم تا هم جوابگوی تنش مجاز باشد و هم تغییر شکل مجاز.

$$A = 83/33\,mm^2 \Rightarrow \frac{\pi d^2}{4} = 83/33 \Rightarrow d = 10/3\,mm$$

در عمل از میله‌ای با قطر $11mm$ استفاده می‌کنیم.

۴ـ۳. یک استوانهٔ توپر به قطر ۵۰ میلی‌متر و طول ۹۰۰ میلی‌متر تحت تأثیر نیروی کششی ۱۲۰ کیلونیوتن قرار دارد. قسمتی از این استوانه به طول L_1 از جنس فولاد و قسمت دیگر که کاملاً به قسمت فولادی چسبیده است، از جنس آلمینیوم و به طول L_2 می‌باشد. (الف) مطلوب است تعیین طولهای L_1 و L_2 به طوری که افزایش طول دو مصالح به یک اندازه باشد. (ب) اضافه طول کل استوانه چقدر می‌باشد؟ ضریب ارتجاعی فولاد 2×10^{5} نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی آلمینیوم $0/7 \times 10^{5}$ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.



(الف) $\delta_{steel} = \delta_{Al} \Rightarrow L_1 = ?$ و $L_2 = ?$

$$\delta_{steel} = \delta_{Al} \Rightarrow \frac{PL_1}{AE_{steel}} = \frac{PL_2}{AE_{Al}}$$

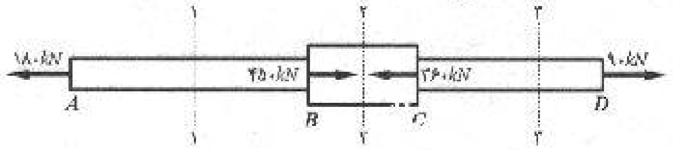
$$E_{steel} \cdot L_2 = E_{Al} \cdot L_1 \Rightarrow L_1 = \frac{E_{steel}}{E_{Al}} \cdot L_2 \Rightarrow L_1 = 2/86\,L_2$$

$$\begin{cases} L_۱ = ۲/۸۶\, L_۲ \\ L_۱ + L_۲ = ۹۰۰ \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} L_۱ = ۶۶۷\, mm \\ L_۲ = ۲۳۳\, mm \end{array}}$$

ب) $\delta = \sum \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \Rightarrow \delta = ۱۲۰ \times ۱۰^۳ \times \left(\frac{۶۶۷}{\frac{\pi}{۴}(۵۰)^۲ \times ۲ \times ۱۰^۵} + \frac{۲۳۳}{\frac{\pi}{۴}(۵۰)^۲ \times ۰/۷ \times ۱۰^۵} \right)$

$\Rightarrow \boxed{\delta = ۰/۴۱\, mm}$

۴-۴. مثال ۴-۱ را با داده‌های جدید زیر مجدداً حل نمایید:
$P_۱ = ۱۸۰$ کیلونیوتن، $P_۲ = ۴۵۰$ کیلونیوتن، $P_۳ = ۳۶۰$ کیلونیوتن، $P_۴ = ۹۰$ کیلونیوتن، سطح مقطع میله از A تا B مساوی ۰/۰۰۱۵ مترمربع و از B تا C مساوی ۰/۰۰۳ مترمربع و از C تا D مساوی ۰/۰۰۱۵ مترمربع می‌باشد.

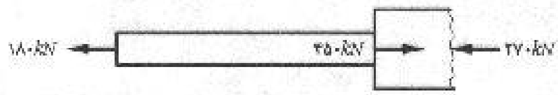


مقطع ۱-۱

$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : -۱۸۰ + P_۱ = ۰ \Rightarrow P_۱ = ۱۸۰\, kN$

$$\delta_{AB} = \frac{P_{AB}\, L_{AB}}{A_{AB}\, E} = \frac{(۱۸۰ \times ۱۰^۳) \times (۲ \times ۱۰^۳)}{(۰/۰۰۱۵ \times ۱۰^۶) \times (۲ \times ۱۰^۵)} = +۱/۲\, mm$$

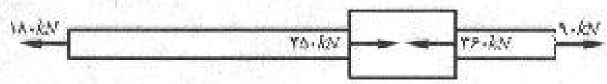
مقطع ۲-۲



$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : -۱۸۰ + ۴۵۰ + P_۲ = ۰ \Rightarrow P_۲ = -۲۷۰\, kN$

$$\delta_{BC} = \frac{P_{BC}\, L_{BC}}{A_{BC}\, E} = \frac{(-۲۷۰ \times ۱۰^۳) \times (۱ \times ۱۰^۳)}{(۰/۰۰۳ \times ۱۰^۶) \times (۲ \times ۱۰^۵)} \Rightarrow \delta_{BC} = -۰/۴۵\, mm$$

مقطع ۳-۳



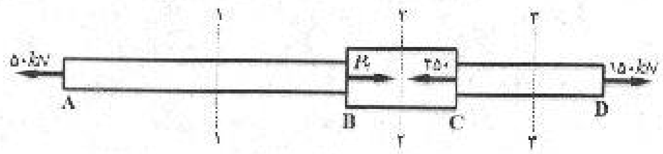
$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : -۱۸۰ + ۴۵۰ - ۳۶۰ + P_۳ = ۰ \Rightarrow P_۳ = ۹۰\, kN$

$$\delta_{CD} = \frac{P_{CD}\, L_{CD}}{A_{CD}\, E} = \frac{(۹۰ \times ۱۰^۳) \times (۱/۵ \times ۱۰^۳)}{(۰/۰۰۱۵ \times ۱۰^۶) \times (۲ \times ۱۰^۵)} \Rightarrow \delta_{CD} = +۰/۴۵\, mm$$

$$\delta = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} = ۱/۲ - ۰/۴۵ + ۰/۴۵ \Rightarrow \boxed{\delta = ۱/۲\, mm}$$

۴-۵. با تعویض داده‌های مثال ۴-۱ به‌صورت زیر:

$P_1 = ۵۰$ کیلونیوتن، $P_2 = ۴۵۰$ کیلونیوتن، $P_3 = ۱۵۰$ کیلونیوتن، مطلوب است تعیین، (الف) نیروی P_4 که برای تعادل میله لازم است. (ب) تغییر طول کلی میلهٔ AD. سطح مقطع میله از A تا B مساوی ۵۰۰ میلی‌مترمربع، از B تا C مساوی ۲۰۰۰ میلی‌مترمربع و از C تا D مساوی ۱۰۰۰ میلی‌مترمربع می‌باشد.



$\xrightarrow{+}\sum F_x = ۰ : -۵۰ - ۴۵۰ + ۱۵۰ + P = ۰ \Rightarrow P = ۳۵۰\, kN$

مقطع ۱-۱: $\xrightarrow{+}\sum F_x = ۰ \; : \; -۵۰ + P_1 = ۰ \Rightarrow P_1 = ۵۰\, kN$

مقطع ۲-۲: $\xrightarrow{+}\sum F_x = ۰ \; : \; -۵۰ + ۳۵۰ + P_2 = ۰ \Rightarrow P_2 = -۳۰۰\, kN$

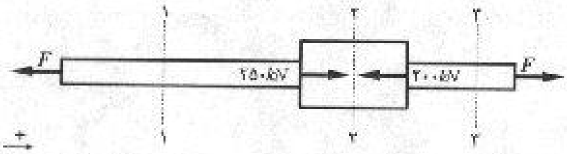
مقطع ۳-۳: $\xrightarrow{+}\sum F_x = ۰ \; : \; -۵۰ + ۳۵۰ - ۴۵۰ + P_3 = ۰ \Rightarrow P_3 = ۱۵۰\, kN$

$$\delta = \left(\frac{PL}{AE}\right)_{AB} + \left(\frac{PL}{AE}\right)_{BC} + \left(\frac{PL}{AE}\right)_{CD}$$

$$\delta = \frac{(۵۰ \times ۱۰^۳) \times (۲ \times ۱۰^۳)}{۵۰۰ \times (۲ \times ۱۰^۵)} + \frac{(-۳۰۰ \times ۱۰^۳) \times (۱ \times ۱۰^۳)}{۲۰۰۰ \times (۲ \times ۱۰^۵)} + \frac{(۱۵۰ \times ۱۰^۳) \times (۱/۵ \times ۱۰^۳)}{۱۰۰۰ \times (۲ \times ۱۰^۵)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = ۱/۳۷۵\, mm}$$

۴-۶. در مثال ۴-۱ مقدار دو نیروی مساوی و مختلف‌الجهت را که بر دو انتهای میله تأثیر می‌کنند، طوری تعیین نمایید که تغییر شکل کل میله مساوی صفر گردد.



مقطع ۱-۱ : $\xrightarrow{+}\sum F_x = ۰ \; ; \; -F + P_1 = ۰ \Rightarrow P_1 = F$

مقطع ۲-۲: $\xrightarrow{+}\sum F_x = ۰ \; : -F + P_2 + ۲۵۰ = ۰ \Rightarrow P_2 = F - ۲۵۰$

مقطع ۳-۳: $\xrightarrow{+}\sum F_x = ۰ \; : -P_3 + F = ۰ \Rightarrow P_3 = F$

$$\delta = \left(\frac{PL}{AE}\right)_{AB} + \left(\frac{PL}{AE}\right)_{BC} + \left(\frac{PL}{AE}\right)_{CD}$$

$$0 = \frac{F \times 2}{0/001 \times 2 \times 10^{11}} + \frac{(F - 250) \times 1}{0/002 \times 2 \times 10^{11}} + \frac{F \times 1/5}{0/001 \times 2 \times 10^{11}}$$

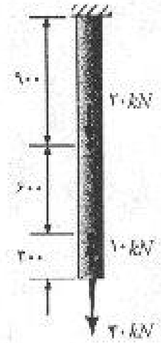
از حل معادله فوق مقدار F بدست می‌آید:

$$\boxed{F = 31/25 kN}$$

۴-۷. یک تسمه به مقطع ۵ × ۷۵ میلی‌متر که به طور قائم آویزان است، از دو قسمت، یکی آلمینیوم به طول ۲ متر و دیگری فولادی به طول ۲/۵ متر تشکیل شده است. این دو قسمت کاملاً به یکدیگر بسته شده‌اند. در انتهای پایین این تسمه، وزنه‌ای به وزن ۲۵ کیلونیوتن آویزان است. با صرفنظر کردن از وزن تسمه، تغییر شکل انتهای تحتانی آن را محاسبه نمایید. ضریب ارتجاعی فولاد، 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی آلمینیوم $0/7 \times 10^5$ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.

$$\delta = \sum \frac{PL}{AE} = \frac{(25 \times 10^3) \times 2000}{(75 \times 5) \times (0/7 \times 10^5)} + \frac{(25 \times 10^3) \times 2500}{(75 \times 5) \times (2 \times 10^5)} \Rightarrow \boxed{\delta = 2/74 mm}$$

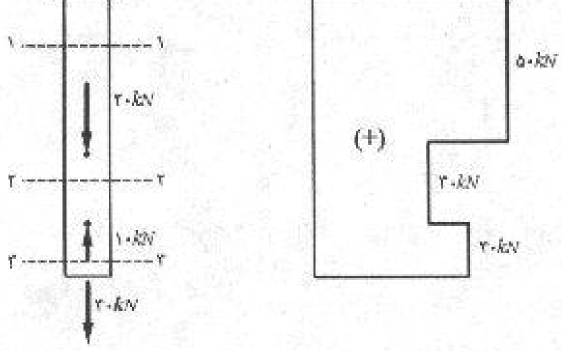
۴-۸. مطابق شکل یک میلگرد فولادی به سطح مقطع ۳۰۰ میلی‌مترمربع که از انتهای فوقانیش آویزان است، تحت تأثیر سه نیروی محوری قرار دارد. مطلوب است تعیین تغییر شکل انتهای آزاد این میله که در اثر این سه نیرو ایجاد می‌شود.



(ابعاد برحسب میلی‌متر)

مسأله ۴-۸

$A = 300 \, mm^2$ $\qquad$ $E = 2 \times 10^5 \, N/mm^2$



مقطع ۱-۱ : $+\uparrow \sum F_y = ۰ : F_۱ - ۲۰ + ۱۰ - ۴۰ = ۰ \Rightarrow F_۱ = +۵۰\,kN$

مقطع ۲-۲ : $+\uparrow \sum F_y = ۰ : F_۲ + ۱۰ - ۴۰ = ۰ \Rightarrow F_۲ = ۳۰\,kN$

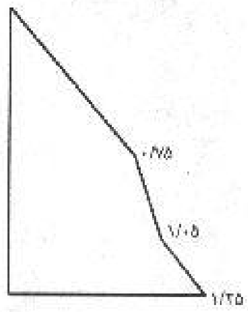
مقطع ۳-۳ : $+\uparrow \sum F_y = ۰ : F_۳ - ۴۰ = ۰ \Rightarrow F_۳ = ۴۰\,kN$

$$\delta_۱ = \frac{F_۱ L}{AE} = \frac{۵۰ \times ۱۰^۳ \times ۹۰۰}{۳۰۰ \times ۲ \times ۱۰^۵} \Rightarrow \delta_۱ = ۰/۷۵\,mm$$

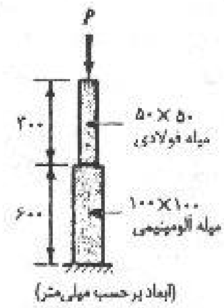
$$\delta_۲ = \frac{F_۲ L}{AE} = \frac{۳۰ \times ۱۰^۳ \times ۶۰۰}{۳۰۰ \times ۲ \times ۱۰^۵} \Rightarrow \delta_۲ = ۰/۳\,mm$$

$$\delta_۳ = \frac{F_۳ L}{AE} = \frac{۴۰ \times ۱۰^۳ \times ۳۰۰}{۳۰۰ \times ۲ \times ۱۰^۵} \Rightarrow \delta_۳ = ۰/۲\,mm$$

$$\delta = \delta_۱ + \delta_۲ + \delta_۳ = ۰/۷۵ + ۰/۳ + ۰/۲ \Rightarrow \boxed{\delta = ۱/۲۵\,mm}$$



۹-۴. یک میلهٔ فولادی و یک میلهٔ آلمینیومی با ابعاد نشان داده شده در شکل مفروض می‌باشند. مطلوب است محاسبهٔ بار P به‌طوری که باعث کاهش طول کل دو میله به اندازهٔ ۰/۲۵ میلی‌متر شود. فرض کنید توزیع تنش قائم روی تمام مقاطع عرضی دو میله یکنواخت می‌باشد و از کمانش دو میله جلوگیری شده است. ترسیمهٔ تغییر شکل محوری را رسم نمایید. ضریب ارتجاعی فولاد را ۲×۱۰^۵ و ضریب ارتجاعی آلمینیوم را $۰/۷ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع فرض کنید.



مسأله ۴-۹

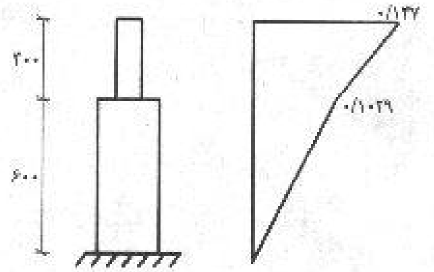
$\delta = ۰/۲۵\,mm \qquad E_{steel} = ۲ \times ۱۰^۵\,N/mm^۲ \quad E_{Al} = ۰/۷ \times ۱۰^۵\,N/mm^۲$

$$\delta = \sum \frac{PL}{AE}$$

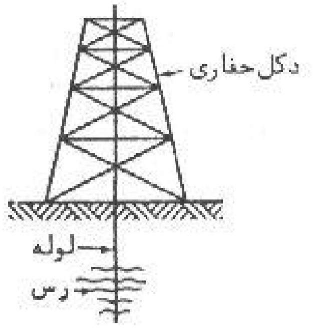
$$۰/۲۵ = \frac{P \times ۳۰۰}{(۵۰ \times ۵۰) \times (۲ \times ۱۰^۵)} + \frac{P \times ۶۰۰}{(۱۰۰ \times ۱۰۰) \times (۰/۷ \times ۱۰^۵)} \Rightarrow P = ۱۷۱/۵۷\,kN$$

$$\delta_۱ = \frac{(۱۷۱/۵۷ \times ۱۰^۳) \times ۳۰۰}{(۵۰ \times ۵۰) \times (۲ \times ۱۰^۵)} = ۰/۱۰۲۹\,mm$$

$$\delta_۲ = \frac{(۱۷۱/۵۷ \times ۱۰^۳) \times ۶۰۰}{(۱۰۰ \times ۱۰۰) \times (۰/۷ \times ۱۰^۵)} = ۰/۱۴۷\,mm$$



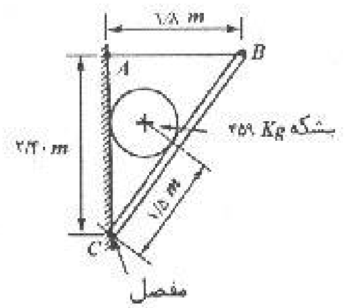
۴-۱۰. در یکی از میدانهای نفتی جنوب کشور، لولهٔ بسیار بلند متهٔ حفاری در داخل رس سخت گیر کرده است (به شکل مسأله مراجعه کنید). لازم است تعیین گردد که این مسأله در چه عمقی اتفاق افتاده است. مهندس مسئول دستور می‌دهد که به این لوله نیروی کششی به طرف بالایی وارد گردد. در نتیجه این عمل لوله به صورت ارتجاعی، ۶۰۰ میلی‌متر بالا می‌آید. در همان لحظه افزایش طول مقیاس ۲۰۰ میلی‌متری، مساوی ۰/۰۳۵ میلی‌متر اندازه‌گیری می‌شود. محل گیر کردن لوله را به طور تقریبی تعیین نمایید. فرض کنید که سطح مقطع لوله ثابت است و محیطی که اطراف لوله را احاطه کرده است، اثر ناچیزی در تغییر شکل ارتجاعی لوله دارد.



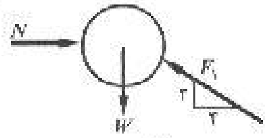
مسأله ۴-۱۰

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{۰/۰۳۵}{۲۰۰} = \frac{۶۰۰}{L} \Rightarrow \boxed{L = ۳۴۲۸/۵۷m}$$

۴-۱۱. یک لچکی (طاقچه) دیواری مطابق شکل ساخته شده است. تمام اتصالات این لچکی مفصلی می‌باشند. سطح مقطع میلهٔ فولادی AB مساوی ۵ میلی‌مترمربع و عضو BC تیر صلبی می‌باشند. (منظور از صلب بودن تیر BC این است که تغییر شکل آن بسیار کوچک است به طوری که می‌توان از آن چشم‌پوشی نمود). اگر یک بشکه به قطر ۱ متر و به جرم ۴۵۹ کیلوگرم در وضعیت نشان داده شده قرار گیرد، افزایش طول میلهٔ AB را محاسبه نمایید. از اصطکاک جدار بشکه صرف‌نظر نمایید و ضریب ارتجاعی فولاد را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌متر مربع در نظر بگیرید.

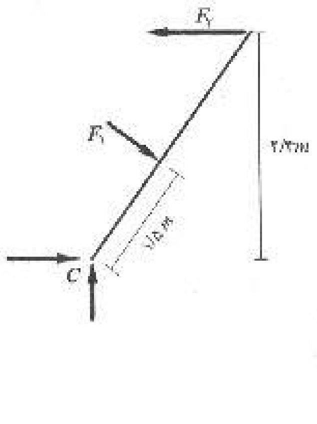


مسأله ۴-۱۱



$$+\uparrow \sum F_y = ۰ : F_۱ \times \frac{۳}{۵} = W \Rightarrow F_۱ = \frac{۵}{۳} \times ۴۵۹ \times ۹/۸۱$$

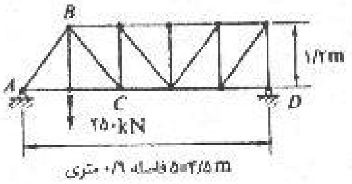
$$\Rightarrow F_۱ = ۷۵۰۴/۶۵N$$



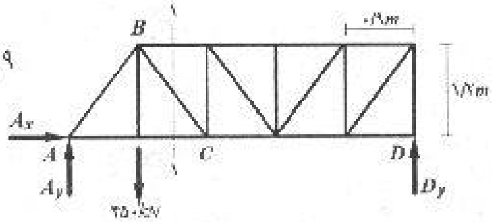
$$\sum M_c = ۰)+ \; : F_۲ \times ۲/۴ - F_۱ \times ۱/۵ = ۰ \Rightarrow F_۲ = ۴/۶۹ kN$$

$$\delta = \frac{F_۲ L}{AE} = \frac{۴/۶۹ \times ۱۰^۳ \times ۱/۸ \times ۱۰^۳}{۵ \times ۲ \times ۱۰^۵} \Rightarrow \boxed{\delta = ۸/۴۴ mm}$$

۴-۱۲. برای خرپای نشان داده شده در شکل، مطلوب است تعیین افزایش طول میلهٔ BC تحت تأثیر نیروی $P = ۴۵۰$ کیلونیوتن. میلهٔ BC از فولاد ساخته شده و سطح مقطع آن ۶۰ میلی‌مترمربع می‌باشد. ضریب ارتجاعی فولاد ۲×۱۰^۵ میلی‌مترمربع می‌باشد.



مسأله ۴-۱۲

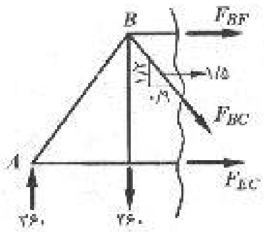


$$\curvearrowleft + \sum M_A = ۰ : D_y \times (۵ \times ۰/۹) - ۴۵۰ \times ۰/۹$$

$$\Rightarrow D_y = ۹۰\, kN$$

$$\uparrow^+ \sum F_y = ۰ : A_y - ۴۵۰ + D_y = ۰ \Rightarrow A_y = ۳۶۰\, kN$$

با استفاده از روش مقطع نیروی BC به‌راحتی محاسبه می‌شود:



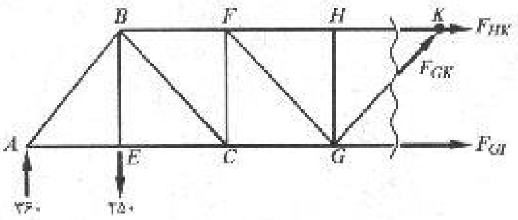
$$\uparrow^+ \sum F_y = ۰ : \ -F_{BC} \times \frac{۱/۲}{\sqrt{۱/۲^۲ + ۰/۹^۲}} + ۳۶۰ - ۴۵۰ = ۰$$

$$\Rightarrow -F_{BC} = ۹۰ \times \frac{۱/۵}{۱/۲} \Rightarrow F_{BC} = -۱۱۲/۵kN \text{ فشاری}$$

$$\delta = \frac{PL}{AE} = \frac{(-۱۱۲/۵\times۱۰^۳)\times(۱/۵\times۱۰^۳)}{۶۰ \times ۲ \times ۱۰^۵} \Rightarrow \boxed{\delta = -۱۴/۰۶\, mm}$$

$$\curvearrowleft + \sum M_G = ۰ : \ -F_{HK} \times ۱/۲ - ۳۶۰ \times (۳ \times ۰/۹) + ۴۵۰ \times (۲ \times ۰/۹) = ۰$$

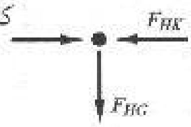
$$\Rightarrow F_{HK} = -۱۳۵kN \text{ فشاری}$$



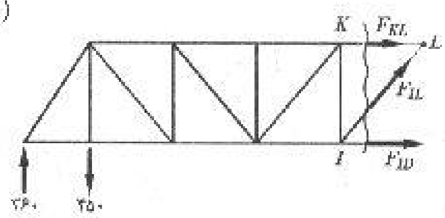
$$\curvearrowleft + \sum M_K = ۰ : \ F_{GI} \times ۱/۲ + ۴۵۰ \times (۳ \times ۰/۹) - ۳۶۰ \times (۴ \times ۰/۹) = ۰$$

$$\Rightarrow F_{GI} = ۶۷/۵kN \text{ کششی}$$

$$\uparrow^+ \sum F_y = ۰ : \ F_{GK} \times \frac{۱/۲}{۱/۵} + ۳۶۰ - ۴۵۰ = ۰ \Rightarrow F_{GK} = ۱۱۲/۵ \text{ کششی}$$



$$\uparrow^+ \sum F_y = ۰ : \ F_{HG} = ۰$$

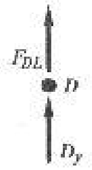


$$\circlearrowleft + \sum M_I = ۰ : \; -F_{KL} \times ۱/۲ - ۳۶۰ \times (۴ \times ۰/۹) + ۴۵۰ \times (۳ \times ۰/۹) = ۰$$

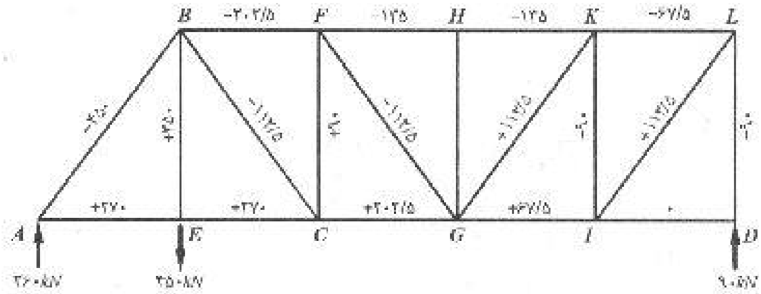
$\Rightarrow F_{KL} = -۶۷/۵ kN$ فشاری

$$\circlearrowleft + \sum M_L = ۰ : \; F_{ID} \times ۱/۲ - ۳۶۰ \times (۵ \times ۰/۹) + ۴۵۰ \times (۴ \times ۰/۹) = ۰ \Rightarrow F_{ID} = ۰$$

$\uparrow + \sum F_y = ۰ : \; F_{IL} \times \frac{۱/۲}{۱/۵} + ۳۶۰ - ۴۵۰ = ۰ \Rightarrow F_{IL} = ۱۱۲/۵$ کششی



$\uparrow + \sum F_y = ۰ : \; D_y + F_{DL} = ۰ \Rightarrow F_{DL} = -۹۰ kN$ فشاری



نیروهای وارده بر اعضاء در شکل مقابل نشان داده شده‌اند. با توجه به مقدار نیروها و طول اعضاء و رابطه $A = \frac{PL}{\delta E}$ کاملاً مشهود است که عضو AB بیشترین سطح را لازم دارد.

$$A = \frac{PL}{\delta E} = \frac{۴۵۰ \times ۱۰^۳ \times \cancel{L}}{(۰/۰۰۱ \times \cancel{L}) \times ۲ \times ۱۰^۵} \Rightarrow \boxed{A = ۲۲۵۰ mm}$$

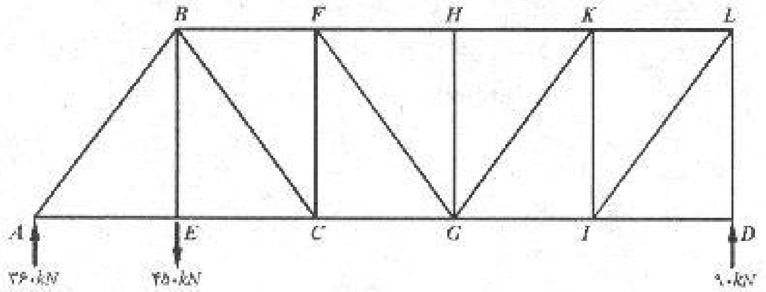
۴-۱۳. اگر تغییر شکل هر یک از اعضای مسأله ۴-۱۲ به ۰/۱ درصد طولش محدود شده باشد، کدامیک از اعضا بزرگترین سطح مقطع را لازم دارد و سطح مقطع لازم چقدر می‌باشد.

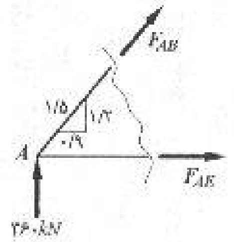
از حل مسأله قبل نیروهای تکیه‌گاهی را داریم:

$A_x = ۰$

$A_y = ۳۶۰ kN$ و $D_y = ۹۰ kN$

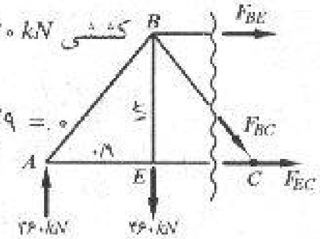
حال با استفاده از برشهایی در مقاطع مختلف سازه، نیروهای وارده بر اعضاء را محاسبه می‌کنیم. ابتدا همه نیروها را کششی فرض می‌کنیم، بدست آمدن علامت منفی در جواب نشان‌دهنده فشاری بودن نیرو می‌باشد.





$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ : F_{AB} \times \frac{۱/۲}{۱/۵} + ۳۶۰ = ۰ \Rightarrow F_{AB} = -۴۵۰\,kN$ فشاری

$\xrightarrow{+} \sum F_x = ۰ : F_{AE} - F_{AB} \times \frac{۰/۹}{۱/۵} = ۰ \Rightarrow F_{AE} = ۲۷۰\,kN$ کششی



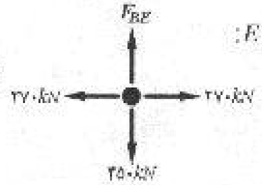
$\circlearrowleft + \sum M_B = ۰ : F_{EC} \times ۱/۲ - ۳۶۰ \times ۰/۹ = ۰ \Rightarrow F_{EC} = ۲۷۰\,kN$ کششی

$\circlearrowleft + \sum M_c = ۰ : -F_{BF} \times ۱/۲ - ۳۶۰ \times (۲ \times ۰/۹) + ۴۵۰ \times ۰/۹ = ۰$

$\Rightarrow F_{BF} = -۲۰۲/۵\,kN$ فشاری

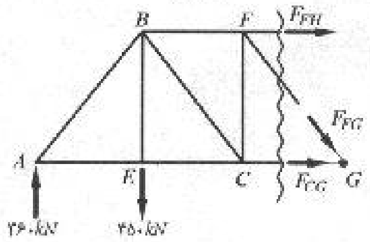
$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ : -F_{BC} \times \frac{۱/۲}{۱/۵} + ۳۶۰ - ۴۵۰ = ۰ \Rightarrow F_{BC} = -۱۱۲/۵$ فشاری

مفصل E:



$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ ; F_{BE} - ۴۵۰ = ۰ \Rightarrow F_{BE} = ۴۵۰\,kN$ کششی

$\circlearrowleft + \sum M_F = ۰ :$



$F_{CG} \times ۱/۲ + ۴۵۰ \times ۰/۹ - ۳۶۰ \times (۲ \times ۰/۹) = ۰$

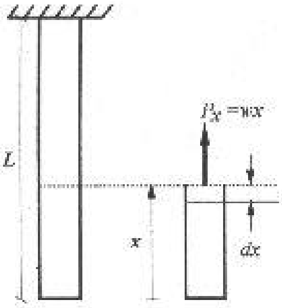
$\Rightarrow F_{CG} = ۲۰۲/۵\,kN$ کششی

$\circlearrowleft + \sum M_G = ۰ : -F_{FH} \times ۱/۲ - ۳۶۰ \times (۳ \times ۰/۹) + ۴۵۰ \times (۲ \times ۰/۹) = ۰$

$\Rightarrow F_{FH} = -۱۳۵\,kN$ فشاری

$\uparrow^{+} \sum F_y = ۰ : -F_{FG} \times \frac{۱/۲}{۱/۵} - ۴۵۰ + ۳۶۰ = ۰ \Rightarrow F_{FG} = -۱۱۲/۵$ فشاری

۴-۱۴. اگر در مثال ۴-۲ جنس میله آلمینیوم با مقطع مربع شکل به ضلع ۲۵ میلی‌متر و به وزن واحد طول ۱۷/۳ نیوتن بر متر باشد، طول میله چقدر باید باشد تا انتهای آزاد میله تحت اثر وزن خود ۶ میلی‌متر افزایش طول پیدا کند. ضریب ارتجاعی آلمینیوم $۰/۷ \times ۱۰^{۵}$ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.



به‌فاصله x از پایین میله، المانی از میله را در نظر بگیرید.

نیروی وارد بر این المان، وزن آن قسمت از میله می‌باشد که زیر آن قرار دارد: $P_x = w \times x$

که در آن w وزن واحد طول میله است.

$$\delta = \int_۰^L \frac{P_x dx}{EA_x} = \int_۰^L \frac{W.x.dx}{EA} = \frac{w}{EA}\int_۰^L x\,dx \Rightarrow \delta = \frac{wL^۲}{۲EA}$$

$$۶ = \frac{(۱۷/۳ \times ۱۰^{-۳}) \times L^۲}{۲ \times (۰/۷ \times ۱۰^۵) \times (۲۵)^۲} \Rightarrow \boxed{L = ۱۷۴/۲\,mm}$$

۴-۱۵. در مثال ۴-۲ اگر به عوض استفاده از قانون هوک، رابطهٔ تنش - کرنش به‌صورت $\sigma = E\varepsilon^n$ (n عدد صحیحی است که بستگی به خواص مصالح دارد) بیان شود، تغییر مکان انتهای آزاد چقدر خواهد بود.

$$\sigma = E\varepsilon^n \Rightarrow \varepsilon^n = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \varepsilon = \left(\frac{\sigma}{E}\right)^{\frac{۱}{n}} \Rightarrow \varepsilon = \left(\frac{P}{AE}\right)^{\frac{۱}{n}}$$

$$\delta = \int_۰^L \varepsilon dx = \int_۰^L \left(\frac{wx}{AE}\right)^{\frac{۱}{n}} dx = \left(\frac{w}{AE}\right)^{\frac{۱}{n}} \int_۰^L x^{\frac{۱}{n}}\,dx$$

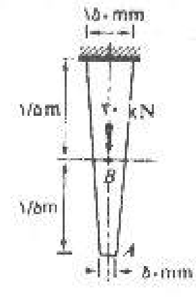
$$= \left(\frac{w}{AE}\right)^{\frac{۱}{n}} \left(\frac{n}{n+۱}\right) \left[x^{\frac{n+۱}{n}}\right]_۰^L = \left(\frac{w}{AE}\right)^{\frac{۱}{n}} \left(\frac{n}{n+۱}\right) L^{\frac{n+۱}{n}}$$

$L^{\frac{n+۱}{n}}$ را به‌صورت $L^{\frac{۱}{n}} \cdot L^۱$ نوشته و $L^{\frac{۱}{n}}$ را در پرانتز اوّل وارد می‌کنیم:

$$\delta = \left(\frac{wL}{AE}\right)^{\frac{۱}{n}} \left(\frac{n}{n+۱}\right) L \qquad wL = W$$

نتیجتاً:

$$\boxed{\delta = \left(\frac{W}{AE}\right)^{\frac{۱}{n}} \left(\frac{n}{n+۱}\right) L}$$

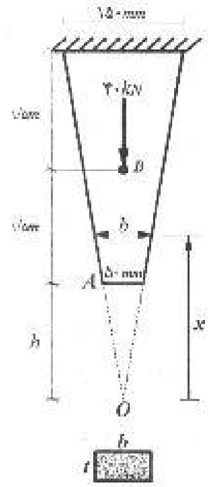


مسأله ۴-۱۶

۴-۱۶. میلهٔ ماهیچه‌ای نشان داده شده در شکل از یک ورق فولادی به ضخامت ۲۵ میلی‌متر بریده شده و در انتهای فوقانی به یک سازهٔ صلب جوش شده است. مطلوب است تعیین تغییر مکان انتهای A که در اثر تأثیر نیروی ۴۰ کیلونیوتن در نقطهٔ B به دست می‌آید: ضریب ارتجاعی فولاد ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد. مرکز مختصات را در محل تقاطع دو ضلع جانبی در نظر بگیرید.

$t = ۲۵\,mm \qquad F = ۴۰\,kN \qquad E = ۲ \times ۱۰^۵\,N/mm^۲$

$$\frac{h}{۵۰} = \frac{h + ۳}{۱۵۰} \Rightarrow h = ۱/۵\,m = ۱۵۰۰\,mm$$



$$\frac{x}{۱۵۰۰} = \frac{b}{۵۰} \Rightarrow b = \frac{x}{۳۰}$$

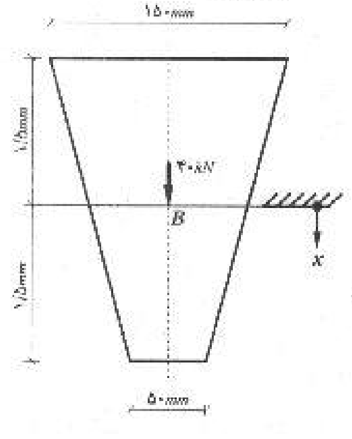
$$A = b.t = \frac{x}{۳۰} \times ۲۵$$

$$\delta = \int_{۱۵۰۰}^{۳۰۰۰} \frac{Pdx}{A_x E} + \int_{۳۰۰۰}^{۴۵۰۰} \frac{Pdx}{A_x E}$$

امّا در انتگرال اوّل مقدار P صفر است (بین A تا B نیرو وجود ندارد) بنابراین:

$$\delta = \int_{۳۰۰۰}^{۴۵۰۰} \frac{۴۰ \times ۱۰^۳\, dx}{\frac{x}{۳۰} \times ۲۵ \times E} \Rightarrow$$

$$\delta = \frac{۳۰ \times ۴۰ \times ۱۰^۳}{۲۵ \times ۲ \times ۱۰^۵} \int_{۳۰۰۰}^{۴۵۰۰} \frac{dx}{x} = ۰/۲۴\,[\ln x]_{۳۰۰۰}^{۴۵۰۰} = ۰/۲۴ \times \left(\ln \frac{۴۵۰۰}{۳۰۰۰}\right) \Rightarrow \boxed{\delta = ۰/۰۹۷۳\,mm}$$



۴-۱۷. مسأله ۴-۱۶ را با در نظر گرفتن مرکز مختصات در نقطهٔ B مجدداً حل نمایید.

$$ds = \frac{Pdx}{A_x E}$$

$$\delta = \int_{-۱۵۰۰}^{۱۵۰۰} d\delta = \int_{-۱۵۰۰}^{۰} d\delta + \int_{۰}^{۱۵۰۰} d\delta$$

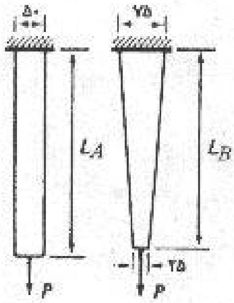
اما در فاصله صفر تا $1500\,mm$ نیرویی وجود ندارد یعنی $P = 0$ نتیجتاً:

$$\int_{0}^{1500} d\delta = 0 \Rightarrow \delta = \int_{-1500}^{0} \frac{Pdx}{A_x E}$$

$$A = 25\left(100 - \frac{x}{30}\right)$$

$$\delta = \int_{-1500}^{0} \frac{40 \times 10^{3}\, dx}{2 \times 10^{5} \times 25\left(100 - \frac{x}{30}\right)} = \frac{4}{500}\int_{-1500}^{0} \frac{dx}{100 - \frac{x}{30}} \Rightarrow \delta = 0/0973$$

۴-۱۸. دو میلهٔ نشان داده شده در شکل از ورقی به ضخامت ۲۵ میلی‌متر بریده شده‌اند. میلهٔ A دارای پهنای ثابت ۵۰ میلی‌متر و میلهٔ B دارای پهنای متغیر مطابق شکل می‌باشد. هر دو میله‌ها تحت تأثیر نیروی یکسان P قرار دارند. نسبت L_A/L_B را طوری تعیین کنید که تغییر شکل هر دو میله یکسان باشد. از وزن دو میله صرف‌نظر نمایید.

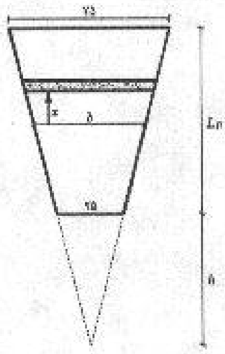


(ابعاد برحسب میلی‌متر)

مسأله ۴-۱۸

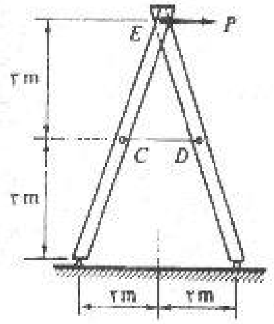
$$\frac{h}{25} = \frac{h + L_B}{75} \Rightarrow h = \frac{L_B}{2} \qquad \text{و} \qquad \frac{x}{h} = \frac{b}{25} \Rightarrow b = \frac{25x}{h} = \frac{50x}{L_B}$$

$$\delta_B = \int_{h}^{h+L_B} \frac{Pdx}{AE} = \int_{\frac{L_B}{2}}^{\frac{3L_B}{2}} \frac{Pdx}{\frac{50x}{L_B}\,.\,t\,.\,E} = \frac{L_B P}{50t}\int_{\frac{L_B}{2}}^{\frac{3L_B}{2}} \frac{dx}{x} \Rightarrow \delta_B = \frac{PL_B}{1250E}\ln 3$$



$$\delta_A = \frac{PL}{AE} = \frac{PL_A}{1250E}$$

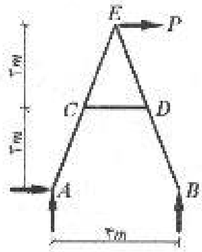
$$\delta A = \delta B \Rightarrow L_B \ln 3 = L_A \Rightarrow \boxed{\frac{L_A}{L_B} = \ln 3 = 1/098}$$



مسأله ۴-۱۹

۴-۱۹. نیروی P که به گرهٔ E از قاب مفصلی نشان داده شده تأثیر می‌کند، باعث افزایش طول کابل CD به میزان ۲/۵ میلی‌متر می‌شود. سطح مقطع کابل ۱۵۰ میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی فولاد ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد. مطلوب است تعیین نیروی P

ابتدا کل جسم را به‌عنوان پیکر آزاد در نظر می‌گیریم.

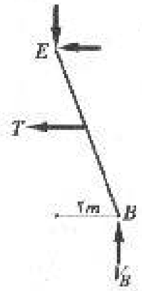


$$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ : V_B \times ۴ - P \times ۶ = ۰ \Rightarrow V_B = \frac{۳}{۲} P$$

$$\delta_{CD} = \frac{TL}{AE} \Rightarrow T = \frac{\delta_{CD} AE}{L}$$

$$T = \frac{۲/۵ \times ۱۵۰ \times ۲ \times ۱۰^۵}{۲ \times ۱۰^۳} \Rightarrow T = ۳۷/۵\, kN$$

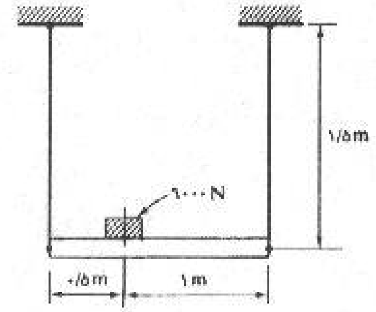
$$\circlearrowleft + \sum M_E = ۰ : ۲ \times V_B - T \times ۳ = ۰$$



با توجه به رابطه (۱):

$$۲ \times \frac{۳}{۲} P - ۳۷/۵ \times ۳ = ۰ \Rightarrow \boxed{P = ۳۷/۵\, kN}$$

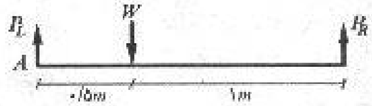
۴-۲۰. مطابق شکل، یک میلهٔ صلب که جرم ۹۰۰ کیلوگرمی روی آن قرار دارد، توسط دو سیم آویزان است. سیم سمت چپ دارای سطح مقطع ۶۰ میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع و سیم سمت راست دارای سطح مقطع ۱۲۰ میلی‌متر مربع و ضریب ارتجاعی $۰/۷ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد. مطلوب است محاسبهٔ تغییر شکل قائم جرم ۹۰۰ کیلوگرمی.



مسأله ۴-۲۰

$$\circlearrowleft + \sum M_A = ۰ : P_R \times ۱/۵ = ۹۰۰ \times ۹/۸۱ \times ۰/۵$$

$$\Rightarrow P_R = ۲۹۴۳N$$



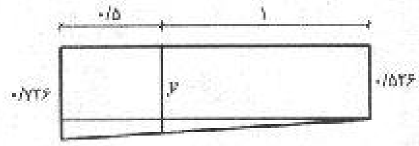
$$\uparrow^+ \sum F_y = ۰ : P_L + P_R - w = ۰ \Rightarrow P_L = ۵۸۸۶N$$

$$\delta_L = \frac{P_L L}{A_L E_L} = \frac{۵۸۸۶ \times ۱/۵ \times ۱۰^۳}{۶۰ \times ۲ \times ۱۰^۵} \Rightarrow \delta_L = ۰/۷۳۶\,mm$$

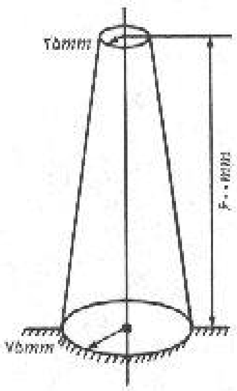
$$\delta_R = \frac{P_R L}{A_R E_R} = \frac{۲۹۴۳ \times ۱/۵ \times ۱۰^۳}{۱۲۰ \times ۰/۷ \times ۱۰^۵} \Rightarrow \delta_R = ۰/۵۲۶\,mm$$

$$y = ۰/۵۲۶ + \frac{۱}{۱/۵}(۰/۷۳۶ - ۰/۵۲۶)$$

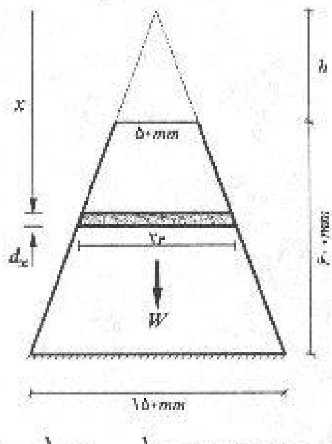
$$\boxed{y = ۰/۶۶۶\,mm}$$



۴-۲۱. مخروط ناقصی با ابعاد نشان داده شده، در قاعدهٔ بزرگش تکیه داده شده است. مطلوب است تعیین تغییر مکان انتهای فوقانی آن در اثر وزن مخروط. جرم مخصوص مصالح مخروط مساوی γ و ضریب ارتجاعی مصالح آن مساوی E می‌باشد (راهنمایی: مبداء مختصات را در رأس مخروط کاملی که از امتداد این مخروط ناقص به دست می‌آید، در نظر بگیرید).



مسئله ۴-۲۱



$$\frac{h}{۵۰} = \frac{h + ۶۰۰}{۱۵۰} \Rightarrow h = ۳۰۰\,mm$$

$$\frac{x}{h} = \frac{۲r}{۵۰} \Rightarrow r = \frac{x}{۱۲} \Rightarrow A = \pi\left(\frac{x}{۱۲}\right)^۲$$

نیروی وارد بر المان dx وزن قسمتی از مخروط است که روی آن قرار دارد که برابر است با حجم آن قسمت ضرب در γg و یا: $P_x = V\gamma g$

قسمتی از مخروط که روی المان قرار دارد بشکل مخروط ناقص می‌باشد و حجم آن بصورت زیر بدست می‌آید:

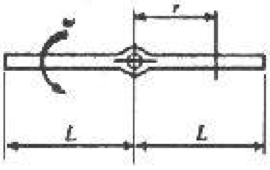
$$V = \frac{۱}{۳}Ax - \frac{۱}{۳}\pi \times ۲۵^۲ \times h = \frac{۱}{۳}\pi\left(\frac{x}{۱۲}\right)^۲ x - \frac{۱}{۳}\pi \times ۲۵^۲ \times ۳۰۰$$

$$P_x = \frac{\pi}{3}\left[\left(\frac{x}{12}\right)^2 x - 25^2 \times 300\right]\gamma g$$

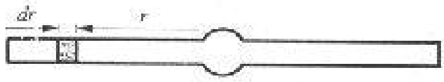
$$\delta = \int_0^L \frac{P_x L}{A_x E} \Rightarrow \delta = \int_{300}^{900} \frac{\frac{\cancel{\pi}}{3}\left(\frac{x^3}{144} - 18/75 \times 10^4\right)\gamma g}{\cancel{\pi}\left(\frac{x}{12}\right)^2 \times E}\, dx$$

$$\delta = \int_{300}^{900} \frac{\gamma g}{3E} \times \left(x - 144 \times 18/75 \times 10^4 / x^2\right) dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = 1 \times 10^5\, \gamma g/E \; mm}$$

۴-۲۲. مطلوب است تعیین افزایش طول کل یک میلهٔ ارتجاعی با سطح مقطع ثابت A (مطابق شکل) که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω رادیان بر ثانیه در صفحهٔ افقی دوران می‌کند. جرم مخصوص مصالح میله مساوی γ و ضریب ارتجاعی آن مساوی E می‌باشد. از مقدار ناچیز اضافه مصالح در محل مفصل صرف‌نظر نمایید. (راهنمایی: ابتدا تنش را در مقطعی به فاصلهٔ r از مفصل با انتگرال‌گیری از اثر نیروهای ماند (اینرسی) بین r و L تعیین نمایید. به مثال ۳-۷ نیز مراجعه نمایید).



مسأله ۴-۲۲



$$dP = dm \,.\, r\omega^2$$

$$dm = \gamma . dV = \gamma . A dr \quad \Rightarrow dP = \gamma A \omega^2 r dr$$

$$P = \int_r^L \gamma A \omega^2 r\, dr \quad \Rightarrow P = \frac{\gamma A \omega^2}{2}\left(L^2 - r^2\right)$$

نیرویی برابر با همین مقدار هم در طرف دیگر میله بوجود می‌آید (در خلاف جهت) بنابراین:

$$\delta = 2 \times \int_0^L \frac{P dr}{AE} = 2 \int_0^L \frac{\gamma A \omega^2}{2} \times \frac{(L^2 - r^2)}{AE}\, dr = \frac{\gamma \omega^2}{E}\left[L^2 r - \frac{r^3}{3}\right]_0^L$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta = \frac{2\gamma \omega^2 L^3}{3E}}$$

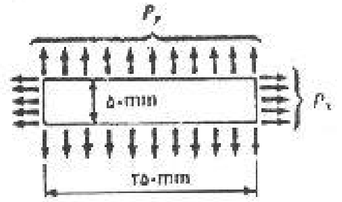
۴-۲۳ یک میلهٔ برنجی به قطر ۶۰ میلی‌متر و طول ۱۵۰ میلی‌متر توسط نیروی محوری گستردهٔ یکنواختی معادل ۲۰۰ کیلونیوتن تحت فشار قرار می‌گیرد. مطلوب است تعیین افزایش قطر ناشی از این نیروی محوری. ضریب ارتجاعی مساوی $0/85 \times 10^5$ نیوتن بر میلی‌متر مربع و ضریب پواسون مساوی ۰/۳ می‌باشد.

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE} = \frac{-200 \times 10^3}{\frac{\pi}{4}(60)^2 \times 0/85 \times 10^5} = -8/32 \times 10^{-4}$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_z} \Rightarrow \varepsilon d = -V\varepsilon_z \Rightarrow \Delta d = -d\nu\varepsilon_z = -۶۰ \times ۰/۳ \times (-۸/۳۲ \times ۱۰^{-۴})$$

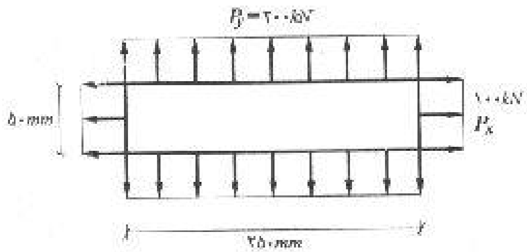
$$\Rightarrow \boxed{\Delta_d = ۰/۰۱۵ mm}$$

۴-۲۴ یک ورق فولادی به ابعاد ۲۵۰ × ۵۰ میلی‌متر و به قطر ۱۰ میلی‌متر تحت تأثیر تنشهای گستردهٔ یکنواخت نشان داده شده در شکل قرار دارد. (الف) اگر ۱۰۰ = P_x کیلونیوتن و ۲۰۰ = P_y کیلونیوتن باشد، چه تغییری در ضخامت ورق در اثر تأثیر این نیروها به وجود می‌آید. (ب) در صورتی که همین تغییر در ضخامت را بخواهیم توسط نیروی P_x به تنهایی به وجود آوریم، مقدار لازم P_x چقدر می‌باشد. ضریب ارتجاعی مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب پواسون مساوی ۰/۲۵ می‌باشد.



مسئلهٔ ۴-۲۴

(الف



$$\sigma_x = \frac{۱۰۰ \times ۱۰^۳}{۵۰ \times ۱۰} \Rightarrow \sigma_x = ۲۰۰\ N/mm^۲$$

$$\sigma_y = \frac{۲۰۰ \times ۱۰^۳}{۲۵۰ \times ۱۰} \Rightarrow \sigma_y = ۸۰\ N/mm^۲$$

$$\sigma_z = ۰$$

$$\varepsilon_z = \frac{۱}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] = \frac{۱}{۲ \times ۱۰^۵}\left[۰ - ۰/۲۵ \times (۲۰۰ + ۸۰)\right] = -۳/۵ \times ۱۰^{-۴}$$

$$\Delta L_z = \varepsilon_z t = -۳/۵ \times ۱۰^{-۴} \times ۱۰ \Rightarrow \Delta L_z = -۳/۵ \times ۱۰^{-۳} mm$$

(ب

$$-۳/۵ \times ۱۰^{-۴} = \frac{۱}{E}(-۰/۲۵\sigma_x) \Rightarrow \sigma_x = ۳/۵ \times ۱۰^{-۴} \times \frac{۲ \times ۱۰^۵}{۰/۲۵} = ۲۸۰\ N/mm^۲$$

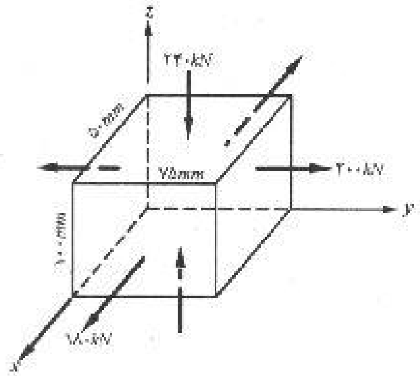
$$P_x = A\sigma_x = (۵۰ \times ۱۰) \times ۲۸۰ \Rightarrow \boxed{P_x = ۱۴۰\ kN}$$

۴-۲۵. یک قطعهٔ مکعب مستطیل فولادی (نظیر چیزی که در شکل ۴-۲۰-الف نشان داده شده است) دارای ابعاد ۵۰ = a و ۷۵ = b و ۱۰۰ = c میلی‌متر می‌باشد. وجوه این نقطه تحت تأثیر نیروهای گستردهٔ یکنواخت ۱۸۰ کیلونیوتن (کششی) در امتداد x، ۲۰۰ کیلونیوتن (کششی) در امتداد y و ۲۴۰ کیلونیوتن (فشاری) در امتداد z قرار دارند. مطلوب است تعیین مقدار سیستم تنهایی از نیرو که فقط در امتداد y تأثیر می‌کند و همان تغییر شکلی را در امتداد y به‌وجود می‌آورد که سیستم نیروی اولیه به‌وجود می‌آورد. ν را مساوی ۰/۲۵ در نظر بگیرید.

$a = ۵۰\, mm \qquad P_x = ۱۸۰\, kN$

$b = ۷۵\, mm \qquad P_y = ۲۰۰\, kN \quad \nu = ۰/۲۵$

$c = ۱۰۰\, mm \qquad P_z = ۲۴۰\, kN$



$$\varepsilon_y = \frac{۱}{E}\left[\sigma_y - \nu\,(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

علامت σ_z بعلت فشاری بودن آن منفی می‌باشد:

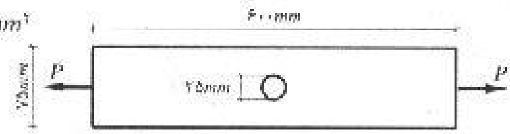
$$\varepsilon_y = \frac{۱}{E}\left[\frac{۲۰۰ \times ۱۰^۳}{۵۰ \times ۱۰۰} - ۰/۲۵\left(\frac{۱۸۰ \times ۱۰^۳}{۷۵ \times ۱۰۰} - \frac{۲۴۰ \times ۱۰^۳}{۵۰ \times ۷۵}\right)\right] \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{۵۰}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma'_y}{E} = \frac{P'_y}{AE} \Rightarrow ۵۰ = \frac{P'_y}{(۵۰ \times ۱۰۰)} \Rightarrow \boxed{P'_y = ۲۵۰\, kN}$$

۴-۲۶. یک تسمه فولادی با سطح مقطع ۷۵ × ۶ میلی‌متر و طول ۶۰۰ میلی‌متر دارای یک سوراخ دایره شکل به قطر ۲۵ میلی‌متر در مرکزش می‌باشد. مطلوب است تعیین حداکثر نیروی کششی محوری را که می‌توان در امتداد طولی بر این تسمه وارد نمود، بدون اینکه تنش حداکثر از مقدار مجاز ۲۲۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع تجاوز کند. (اثر تمرکز تنش را در نظر بگیرید)

تسمه $۶۰۰ \times ۷۵ \times ۶\, mm \quad \sigma_{مجاز} = ۲۲۰\, N/mm^۲$

$۲r = ۲۵\, mm$

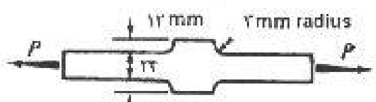


$$\left.\begin{array}{l} r = \dfrac{۲۵}{۲} = ۱۲/۵\, mm \\[2ex] d = ۷۵ - ۲۵ = ۵۰\, mm \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{r}{d} = ۰/۲۵$$

از نمودار شکل (۴-۷) مقدار K برابر ۲/۲۵ بدست می‌آید. $K = ۲/۲۵$

$$\sigma = K\frac{P}{A} \Rightarrow P = \frac{\sigma A}{K} = \frac{۲۲۰ \times (۷۵ - ۲۵) \times ۶}{۲/۲۵} \Rightarrow P = ۲۹/۳۳\, kN$$

۴-۲۷. تسمه‌ای مطابق شکل که تحت تأثیر نیروی کششی P قرار دارد، مفروض است. تعیین نمایید که این میله در اثر وجود زائده میانی چند درصد ضعیف شده است. اگر تمرکز تنش را در نظر بگیرید.



مسئله ۴-۲۷

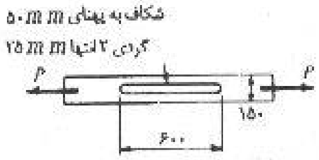
$$\frac{r}{d} = \frac{3}{24} = 0/125$$

$$\frac{D}{d} = \frac{48}{24} = 2$$

از نمودار شکل (۴-۷) $K = 2/05$

$$\frac{\sigma}{\sigma_{max}} = \frac{\frac{P}{A}}{K\frac{P}{A}} = \frac{1}{K} = \frac{1}{2/05} = 0/49$$

۴-۲۸. یک شکاف طولانی در تسمه‌ای فولادی به ضخامت ۲۵ و پهنای ۱۵۰ میلی‌متر و طول ۳ متر مطابق شکل ایجاد شده است. (الف) مطلوب است تعیین تنش حداکثری را که در اثر تأثیر نیروی محوری $P = 200$ کیلونیوتن در آن ایجاد می‌شود. فرض کنید که منحنی فوقانی شکل ۴-۳۱ در این مورد صادق است. (ب) برای همان حالت، تغییر طول کل میله را تعیین نمایید. از اثر موضعی تمرکز تنش صرف‌نظر نمایید و طول شکاف را مساوی ۶۰۰ میلی‌متر فرض کنید. (پ) افزایش طول همان میله را وقتی که $P = 700$ کیلونیوتن می‌باشد، تخمین بزنید. فرض کنید که فولاد تا کرنش ۰/۰۲ متر بر متر در تنشی معادل ۲۸۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع جاری می‌شود. (ت) با حذف نیروی حالت پ، چه تغییر شکلهای پس‌ماندی در میله به وجود می‌آید. ضریب ارتجاعی فولاد را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع فرض کنید.



مسأله ۴-۲۸

الف)

$$\frac{r}{d} = \frac{25}{150} = 0/167$$

از روی شکل (۴-۷) مقدار $K = 2/3$ بدست می‌آید

$$\sigma_{max} = K\frac{P}{A} = 2/3 \times \frac{200 \times 10^3}{(150 - 50) \times 25} \Rightarrow \sigma_{max} = 184\,MPa$$

ب)

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{200 \times 10^3 \times (3000 - 600)}{150 \times 25 \times 2 \times 10^5} + \frac{200 \times 10^3 \times 600}{(150 - 50) \times 25 \times 2 \times 10^5} = 0/64 + 0/24$$

$$\Rightarrow \delta = 0/88\,mm$$

پ)

تنش در قسمت شکافدار: $\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{700 \times 10^3}{25 \times 100} = 280\,MPa$

تنش در قسمت بدون شکاف $\sigma_2 = \frac{P}{A} = \frac{700 \times 10^3}{25 \times 150} = 187\,MPa$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود در قسمت شکاف‌دار جسم به تنش تسلیم رسیده. بنابراین با کرنش ۰/۰۲ جاری می‌شود.

$$\delta_1 = 0/02 \times 600 = 12\,mm$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{187}{2 \times 10^5} = 9/35 \times 10^{-4}$$

$$\delta_2 = 9/35 \times 10^{-4} \times 2400 = 2/24\,mm \qquad \delta = \delta_1 + \delta_2 = 14/24\,mm$$

ت) با برداشتن بار قسمت بدون شکاف میله بهشکل کاملاً ارتجاعی طول اولیه را بدست می‌آورد ولی قسمت شکاف‌دار چون تغییر طول پلاستیک داده بود یک کرنش پس ماند در آن ایجاد می‌شود و به طول اولیه خود بر نمی‌گردد:

$$\delta_R = \delta_۱ - \delta_e$$

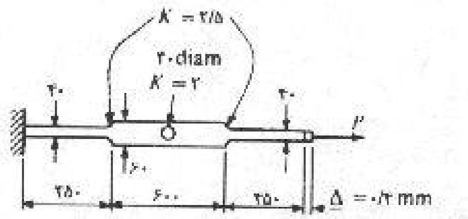
δ_R کرنش پس ماند

δ_e کرنش الاستیک

$$\varepsilon_۱ = \frac{\sigma_۱}{E} = \frac{۲۸۰}{۲ \times ۱۰^۵} = ۱/۴ \times ۱۰^{-۳}$$

$$\delta_R = ۱۲ - ۱/۴ \times ۱۰^{-۳} \times ۶۰۰ \Rightarrow \delta_R = ۱۱/۱۶\,mm$$

۴-۲۹. ضخامت تسمهٔ نشان داده شده در شکل مساوی ۲۵ میلی‌متر می‌باشد. در محلهای تغییر مقطع مقادیر تقریبی ضرایب تمرکز تنش نشان داده شده است. **تحت تأثیر نیروی P تسمه به اندازهٔ ۰/۴ میلی‌متر افزایش طول پیدا می‌کند. مطلوب است تعیین حداکثر تنشی که در اثر این نیرو در تسمه به‌وجود می‌آید. در محاسبات مربوط به تغییر شکل میله از اثر تمرکز تنش چشم‌پوشی نمایید. ضریب ارتجاعی را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع فرض نمایید.**



مسأله ۴-۲۹

$$\delta = \sum \frac{PL}{AE} \Rightarrow ۰/۴ = \frac{۲۵۰ \times P}{(۴۰ \times ۲۵) \times ۲ \times ۱۰^۵} + \frac{۶۰۰P}{۶۰ \times ۲۵ \times ۲ \times ۱۰^۵} + \frac{۲۵۰ \times P}{۴۰ \times ۲۵ \times ۲ \times ۱۰^۵}$$

$$\Rightarrow ۰/۴ = (۰/۲۲۵P + ۰/۲P + ۰/۲۲۵P) \times ۱۰^{-۵} \Rightarrow P = ۶۱/۵۴\,kN$$

بدیهی است مقدار تنش در جایی که سوراخ وجود دارد یا نواحی که جسم تغییر ضخامت می‌دهد بعلت پدیده تمرکز تنش بیشتر از سایر نواحی خواهد بود.

تنش در محلی که ضخامت جسم تغییر می‌کند:

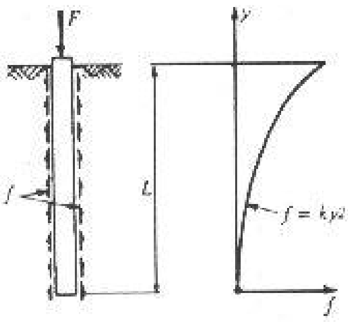
$$\sigma_۱ = K_۱ \frac{P}{A} = \frac{۲/۵ \times ۶۱/۵۴ \times ۱۰^۳}{۴۰ \times ۲۵} \Rightarrow \sigma_۱ = ۱۵۳/۸۵\,N/mm^۲$$

تنش در محل سوراخ:

$$\sigma_۲ = K_۲ \frac{P}{A} = ۲ \times \frac{۶۱/۵۴ \times ۱۰^۳}{(۶۰ - ۴۰) \times ۲۵} \Rightarrow \sigma_۲ = ۲۴۶/۱۵\,N/mm^۲$$

با مقایسه دو مقدار مشخص می‌شود که مقدار ماکزیمم تنش در محل سوراخ می‌باشد.

۴-۳۰. یک شمع چوبی با مقطع ثابت که به طول L در داخل زمین رسی کوبیده شده است، نیروی F را در انتهای خود حمل می‌کند. این نیرو تماماً توسط اصطکاک f که تغییرات آن مطابق شکل است، حمل می‌شود. (الف) مطلوب است کاهش طول کل شمع به ازای مقادیر F، A، L و E (ب)، اگر $P = ۴۲۰$ کیلونیوتن، $L = ۱۲$ متر و $A = ۶۴۰۰۰$ میلی‌مترمربع و $E = ۱۰۰۰۰$ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، مقدار کاهش طول چقدر خواهد بود. (راهنمایی: ابتدا با استفاده از تعادل نیروها، مقدار k را تعیین نمایید).



مسئله ۴-۳۰

الف)

$$F = \int_0^L f dA = \int_0^L k y^2 (2\pi\, r\, dy) = \int_0^L k y^2 \left(2\pi \sqrt{\frac{A}{\pi}}\, dy\right)$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{2}{3} k L^3 \sqrt{\pi A} \Rightarrow k = \frac{3}{2} \frac{F}{L^3 \sqrt{\pi A}}$$

$$F = \int_0^y f dA = \int_0^y k y^2 (2\pi\, r\, dy) = \int_0^y k \left(2\pi \sqrt{\frac{A}{\pi}}\right) y^2 dy \Rightarrow F = \frac{2}{3} k \sqrt{A\pi}\; y^3$$

$$\Delta L = \int_0^L d\,(\Delta L) = \int_0^L \frac{F dy}{EA} = \int_0^L \frac{2 k \sqrt{A\pi}\, y^3}{3EA}\, dy$$

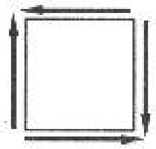
$$= \frac{2k}{3E}\sqrt{\frac{\pi}{A}} \int_0^L y^3\, dy = \frac{kL^4}{6E}\sqrt{\frac{\pi}{A}} = \frac{3F}{2L^3\sqrt{\pi A}} \cdot \frac{L^4}{6E}\sqrt{\frac{\pi}{A}} \Rightarrow \boxed{\Delta L = \frac{FL}{4EA}}$$

ب)

$$\Delta L = \frac{420 \times 10^3 \times 12 \times 10^3}{4 \times 1 \times 10^4 \times 64 \times 10^3} \Rightarrow \Delta L = 1/97\, mm$$

مسائل فصل پنجم

۵-۱. مطلوب است تعیین تنش برشی در تارهای خارجی یک میلهٔ استوانه‌ای توپر به قطر ۷۵ میلی‌متر تحت اثر لنگر پیچشی ۵۵۰۰ نیوتن‌متر، با فرض اینکه لنگر پیچشی در امتداد نشان داده شده در شکل ۵-۵- الف، وارد گردد، جهت تنشهای برشی محاسبه شده را در روی یک طرح مناسب نشان دهید.



$$J = \frac{\pi d^۴}{۳۲} = \frac{\pi(۰/۰۷۵)^۴}{۳۲} = ۳/۱۱ \times ۱۰^{-۶}\ m^۴ \quad C = \frac{d}{۲} = ۰/۰۳۷۵m$$

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{۵۵۰۰ \times ۰/۰۳۷۵}{۳/۱۱ \times ۱۰^{-۶}} = ۶/۶۳ \times ۱۰^۷\ Pa = ۶۶/۳\ MPa$$

۵-۲. یک محور استوانه‌ای توخالی به قطر خارجی ۱۰۰ میلی‌متر و قطر داخلی ۸۰ میلی‌متر مفروض است. اگر تنش برشی مجاز مصالح استوانه ۵۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، لنگر پیچشی قابل حمل توسط این محور را تعیین نمایید. در صورتی که این لنگر پیچشی بر محور وارد آید، تنش برشی موجود در سطح داخلی محور را تعیین نمایید.

$$J = \frac{\pi}{۲}(d_o^۴ - d_i^۴) = \frac{\pi}{۲}(۵۰^۴ - ۴۰^۴) = ۵/۸ \times ۱۰^۶\ mm^۴$$

$$T_{all} = \frac{\tau_{all} J}{c} = \frac{۵۵ \times ۵/۸ \times ۱۰^۶}{۵۰} = ۶/۳۷ \times ۱۰^۶\ N.mm = ۶۳۷۵/۸\ N.m$$

$$\tau_{inner} = \frac{\rho}{c}\tau = \frac{۴۰}{۵۰} \times ۵۵ = ۴۴\ N/mm^۲$$

۵-۳. یک میلهٔ استوانه‌ای از چوب داگلاس‌فیر به قطر ۲۰۰ میلی‌متر که الیاف آن به موازات محور مرکزی آن می‌باشد، مفروض است. اگر تنش برشی مجاز در امتداد الیاف این چوب ۸/۴ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، مطلوب است تعیین لنگر پیچشی مجاز قابل حمل توسط این میله استوانه‌ای.

$$J = \frac{\pi r^۴}{۲} = \frac{\pi(۰/۱)^۴}{۲} = ۱/۵۷ \times ۱۰^{-۴}\ m^۴$$

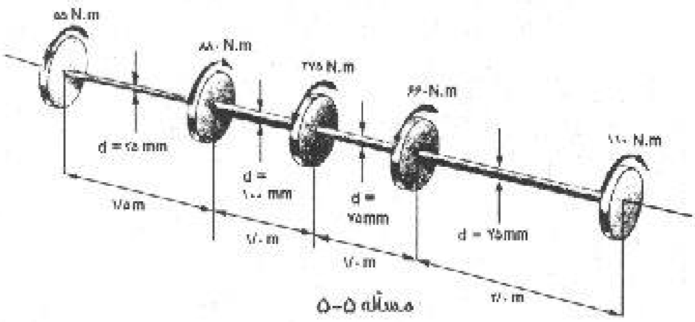
$$T = \frac{\tau J}{c} = \frac{۸/۴ \times ۱۰^۶ \times ۱/۵۷ \times ۱۰^{-۴}}{۰/۱} = ۱۳۱۸۸\ N.m$$

۵-۴. اگر از داخل یک محور استوانه‌ای توپر به قطر ۳۰۰ میلی‌متر، سوراخی استوانه‌ای به قطر ۲۰۰ میلی‌متر برداشته شود، چند درصد از مقاومت پیچشی این محور کم می‌شود.

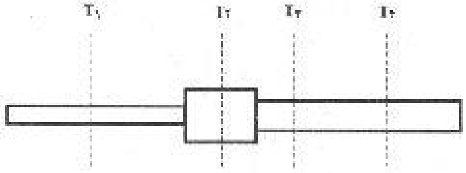
$$\frac{T_۲}{T_۱} = \frac{J_۲}{J_۱} = \frac{\frac{\pi}{۲}(r^۴ - b^۴)}{\frac{\pi}{۲}r^۴} = \frac{۱۵۰^۴ - ۱۰۰^۴}{۱۵۰^۴} = ۰/۸۰۲ = ۸۰/۲\%$$

$$۱۰۰\% - ۸۰/۲\% = ۱۹/۸\%$$

۵-۵. محور استوانه‌ای نشان داده شده مفروض است. حداکثر تنش برشی پیچشی ایجاد شده در این محور چقدر است و بین کدام یک از چرخ‌دنده‌ها اتفاق می‌افتد.



مسئله ۵-۵



با انتخاب مقاطعی در محلهای مورد نیاز و بکارگیری معادله تعادل پیچشی کوپل پیچشی اعمال شده بر مقاطع بدست می‌آید:

$$T_1 = ۵۵\, N.m \qquad T_2 = ۸۲۵\, N.m \qquad T_3 = ۵۵۰\, N.m \qquad T_4 = ۱۱۰\, N.m$$

$$\tau_1 = \frac{T_1\, c_1}{J_1} = \frac{۵۵۰۰۰\ (N.mm) \times \frac{۲۵}{۲}}{\frac{\pi}{۳۲}(۲۵)^۴} = ۱۷/۹\, MPa$$

$$\tau_2 = \frac{T_2\, c_2}{J_2} = \frac{۸۲۵۰۰۰ \times ۵۰}{\frac{\pi}{۳۲}(۱۰۰)^۴} = ۴/۲\, MPa$$

بین مقاطع ۳ و ۴ به‌علت یکسان بودن سایر شرایط، مقطعی که کوپل بیشتری به آن اعمال می‌شود بحرانی‌تر است:

$$\tau_3 = \frac{T_3\, c_3}{J_3} = \frac{۵۵۰۰۰۰ \times \frac{۷۵}{۲}}{\frac{\pi}{۳۲}(۷۵)^۴} = ۶/۶۴\, MPa$$

$$\tau_{max} = \tau_1 = ۱۷/۹\, MPa$$

۵-۶. یک محور فولادی استوانه‌ای توپر به قطر ۱۵۰ میلی‌متر توانی معادل ۴۵۰ کیلو وات را با سرعتی معادل ۱/۵ هرتز منتقل می‌نماید. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی تولید شده در محور. اگر سرعت به ۶ هرتز افزایش پیدا کند، چه تغییری در مقدار تنش برشی ایجاد می‌شود.

$$T = ۹۵۴۰\frac{kW}{n} = ۹۵۴۰ \times \frac{۴۵۰}{۱/۵ \times ۶۰} = ۴۷۷۰۰\, N.m$$

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{۴۷۷۰۰ \times ۱۰^۳ \times ۷۵}{\frac{\pi}{۲}(۷۵)^۴} = ۷۱/۹\,MPa$$

$$\tau' = \frac{۱/۵}{۶} \times ۷۱/۹ = ۱۸MPa$$ مقدار تغییر تنش $= ۷۱/۹ - ۱۸ = ۵۳/۹\,MPa$

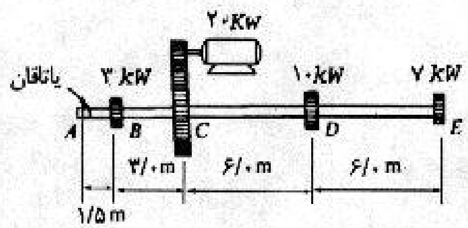
۵-۷. دو محور استوانه‌ای فولادی، یکی توخالی به قطر خارجی ۹۰ میلی‌متر و به قطر داخلی ۳۰ میلی‌متر و دیگری توپر به قطر ۹۰ میلی‌متر قرار است که هر کدام توانی معادل ۵۰ کیلووات با سرعت ۳ هرتز منتقل نمایند. حداکثر تنش برشی ایجاد شده در هر کدام از محورها را تعیین نمایید.

$$T = ۹۵۴۰ \times \frac{۵۰}{۳ \times ۶۰} = ۲۶۵۰\,N.m$$

$$\tau_۱ = \frac{Tc_۱}{J_۱} = \frac{۲۶۵۰ \times ۱۰^۳ \times ۴۵}{\frac{\pi}{۳۲}(۹۰^۴ - ۳۰^۴)} = ۱۸/۷۵\,MPa$$

$$\tau_۲ = \frac{Tc_۲}{J_۲} = \frac{۲۶۵۰ \times ۱۰^۳ \times ۴۵}{\frac{\pi}{۳۲}۹۰^۴} = ۱۸/۵۱\,MPa$$

۵-۸. یک محور استوانه‌ای توپر به قطر ۵۰ میلی‌متر حرکت یک موتور به توان ۲۰ کیلووات را به سه چرخ‌دنده با سرعت ۳ هرتز مطابق شکل انتقال می‌دهد. توان مصرفی هر کدام از چرخ‌دنده‌ها در روی شکل نوشته شده است. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی پیچشی در مقاطعی بین AB، BC، CD، DE.



مسئله ۵-۸

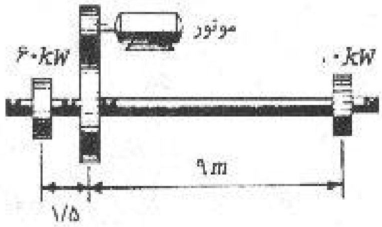
با دقت به مجموعه نشان داده شده در شکل ملاحظه می‌گردد که بیشترین توان انتقالی ۱۷kW بوده که توسط قسمت CD محور منتقل می‌گردد و با توجه به یکسان بودن مشخصات در طول محور، این قسمت بحرانی‌ترین قسمت محور می‌باشد.

$$T_{max} = ۹۵۴۰ \times \frac{۱۷}{۳ \times ۶۰} = ۹۰۱\,N.m \qquad J = \frac{\pi}{۲} \times ۲۵^۴ = ۰/۶۱ \times ۱۰^۶\,mm^۴$$

$$\tau_{CD} = \frac{Tc}{J} = \frac{۹۰۱ \times ۱۰^۳ \times ۲۵}{۰/۶۱ \times ۱۰^۶} = ۳۶/۹\,MPa$$

$$\tau_{BC} = \frac{۳}{۱۷} \times ۳۶/۹ = ۶/۵۲\,MPa$$ و $$\tau_{DE} = \frac{۷}{۱۷} \times ۳۶/۹ = ۱۵/۱۹\,MPa$$ و $\tau_{AB} = ۰$

۵-۹. یک موتور توسط یک سری چرخ‌دنده محوری مطابق شکل را با سرعتی معادل ۶۳۰ دور در دقیقه می‌چرخاند. توان مصرفی هر یک از چرخ‌دنده‌ها در روی شکل نوشته شده است. در صورتی که بخواهیم محور فوق استوانه‌ای توپر با قطر ثابت باشد، با توجه به اینکه تنش برشی مجاز ۳۷ نیوتن بر میلی‌مترمربع است، قطر محور را تعیین نمایید.



مسأله ۵-۹

$$T = ۹۵۴۰ \times \frac{۶۰}{۶۳۰} = ۹۰۸/۵۷ \, N.m$$

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi}{۲} c^۳ = \frac{T}{\tau} \Rightarrow \frac{\pi}{۲} c^۳ = \frac{۹۰۸/۵۷ \times ۱۰^۳}{۳۷}$$

$$\Rightarrow c = ۲۵ \, mm$$

$$d = ۲c = ۵۰ \, mm$$

۵-۱۰. مطلوب است طراحی یک محور استوانه‌ای توخالی برای انتقال ۲۰۰ کیلو وات با سرعت ۷۵ دور در دقیقه بدون اینکه تنش برشی ایجاد شده در آن از ۴۳ نیوتن بر میلی‌مترمربع تجاوز کند. نسبت قطر خارجی به قطر داخلی را مساوی ۱/۲ در نظر بگیرید.

$$T = ۹۵۴۰ \times \frac{۲۰۰}{۷۵} = ۲۵۴۴۰ \, N.m$$

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau} = \frac{۲۵۴۴۰ \times ۱۰^۳}{۴۳} = ۵/۹ \times ۱۰^۵$$

$$\frac{J}{c} = \frac{\frac{\pi}{۳۲}\left[d^۴ - \left(\frac{d}{۱/۲}\right)^۴\right]}{\frac{d}{۲}} = ۵/۹ \times ۱۰^۵ \Rightarrow d_o = ۱۸۰ \, mm$$

$$d_i = \frac{d_o}{۱/۲} = ۱۵۰ \, mm$$

۵-۱۱. مطلوب است تعیین زاویهٔ پیچش کل بین دو مقطع A و E از محور مسأله ۵-۸. ضریب ارتجاعی برشی G را مساوی $۰/۸۴ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.

$$T_{AB} = ۰ \quad و \quad T_{CD} = ۹۰۱ \, N.m$$

$$T_{BC} = \frac{۳}{۱۷} \times ۹۰۱ = ۱۵۹ \, N.m \qquad T_{DE} = \frac{۷}{۱۷} \times ۹۰۱ = ۳۷۱ \, N.m$$

$$\varphi_A = \sum \frac{TL}{JG} \qquad J = \frac{\pi (۲۵ \times ۱۰^{-۳})^۴}{۲} = ۶/۱۴ \times ۱۰^{-۷} \, m^۴$$

$$\varphi_A = \frac{۱}{۶/۱۴ \times ۱۰^{-۷} \times ۰/۸۴ \times ۱۰^{۱۱}}\left[-۱۵۹ \times ۳ + ۹۰۱ \times ۶ + ۳۷۱ \times ۶\right] = ۰/۱۳۸ \, rad = ۸^\circ$$

۵-۱۲. طول یک میلهٔ استوانه‌ای توپر آلمینیومی به قطر ۵ میلی‌متر چقدر باید باشد تا بدون اینکه تنش برشی در آن از ۴۲ نیوتن بر میلی‌مترمربع تجاوز کند، بتواند یک دور کامل دوران کند. ضریب ارتجاعی برشی G مساوی $۰/۲۷ \times ۱۰^{۵}$ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.

$$\varphi = \frac{TL}{JG} = \frac{\tau JL}{cJG} = \frac{\tau L}{cG}$$

$$L = \frac{\varphi c G}{\tau} = \frac{۲\pi \cdot (۲/۵ \times ۱۰^{-۳})(۰/۲۷ \times ۱۰^{۱۱})}{۴۲ \times ۱۰^{۶}} = ۱۰/۱\, m$$

۵-۱۳. یک میلهٔ استوانه‌ای توخالی به طول ۱۵۰ میلی‌متر به عنوان یک فنر پیچشی به کار گرفته می‌شود. نسبت قطر داخلی به قطر خارجی این میله $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. سختی لازم برای این فنر، $\frac{۱}{۸۴}$ درجه برای هر نیوتن متر می‌باشد. مطلوب است تعیین قطر خارجی این میله ضریب ارتجاعی برشی G را مساوی $۰/۸۴ \times ۱۰^{۵}$ نیوتن بر میلی‌متر مربع در نظر بگیرید.

$$J = \frac{TL}{\varphi G} = \frac{۱۰۰۰ (N.mm) \times ۱۵۰}{\left(\frac{۱}{۸۴} \times \frac{\pi}{۱۸۰}\right) \times ۰/۸۴ \times ۱۰^{۵}} = ۸۵۹۴\, mm^{۴}$$

$$J = \frac{\pi}{۲}\left[c^{۴} - \left(\frac{c}{۲}\right)^{۴}\right] = \frac{۱۵\pi}{۳۲} c^{۴} = ۸۵۹۴ \Rightarrow c = ۸/۷۴\, mm$$

$$d = ۲c = ۱۷/۵\, mm$$

۵-۱۴. یک محور استوانه‌ای توپر آلمینیومی به طول ۱ متر و قطر خارجی ۵۰ میلی‌متر قرار است با یک محور استوانه‌ای توخالی فولادی با همان طول و همان قطر خارجی تعویض شود، به طوری که هر دو محور بتوانند لنگر پیچشی یکسانی را حمل کنند و زاویهٔ پیچش آنها در طول کل، مساوی باشد. شعاع داخلی محور استوانه‌ای توخالی فولادی چقدر باید باشد. ضریب ارتجاعی برشی فولاد مساوی $۰/۸۴ \times ۱۰^{۵}$ و ضریب ارتجاعی برشی آلمینیوم مساوی $۰/۲۸ \times ۱۰^{۵}$ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشند.

$$\frac{\varphi_{st}}{\varphi_{Al}} = ۱ \Rightarrow \frac{J_{Al}G_{Al}}{J_{st}G_{st}} = ۱ \Rightarrow J_{st} = \frac{G_{Al}}{G_{st}} J_{Al}$$

$$\frac{\pi}{۳۲}\left(۵۰^{۴} - d_i^{۴}\right) = \frac{۰/۲۸}{۰/۸۴} \times \frac{\pi}{۳۲} ۵۰^{۴}$$

$$d_i^{۴} = ۵۰^{۴} - \frac{۲۸}{۸۴} ۵۰^{۴} \Rightarrow d_i = ۴۵/۲\, mm \quad r_i = \frac{d_i}{۲} = ۲۲/۶\, mm$$

۵-۱۵. یک محور استوانه‌ای توپر به قطر ۵۰ میلی‌متر و طول ۹۰۰ میلی‌متر در یک انتها گیردار و در انتهای دیگر آزاد است. قرار است یک سوراخ استوانه‌ای به قطر ۳۵ میلی‌متر، هم محور با استوانه اصلی، در داخل آن از انتهای آزاد ایجاد گردد. مطلوب است تعیین طول سوراخ فوق به طوری که

زاویهٔ پیچشی کل محور در اثر لنگر پیچشی ۱۰۰ نیوتن متر، مساوی ۰/۱۲ درجه گردد. ضریب ارتجاعی برشی را مساوی $۰/۸۴ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.

$$J_1 = \frac{\pi}{۳۲} \times ۵۰^۴ = ۶۱۳۵۹۲/۳ mm^۴$$

$$J_2 = \frac{\pi}{۳۲} \times (۵۰^۴ - ۳۵^۴) = ۴۶۶۲۶۸/۸ mm^۴$$

$$\varphi = \sum \frac{Tl}{JG} = \frac{T}{G}\left(\frac{l_2}{J_2} + \frac{۹۰۰ - l_2}{J_1}\right) \qquad (۱)$$

با قرار دادن مقادیر زیر و تیز مقادیر J_1 و J_2 محاسبه شده در بالا مقدار l_2 از معادله اخیر بدست می‌آید:

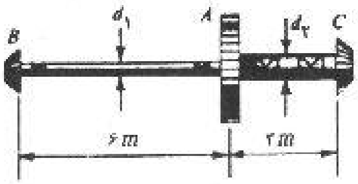
$$\varphi = \frac{۰/۱۲\pi}{۱۸۰} \quad و \quad T = ۱۰۰ \times ۱۰^۳ N.mm \quad و \quad G = ۰/۸۴ \times ۱۰^۵ N/mm^۲$$

$$(۱) \Rightarrow l_2 = ۵۶۸ mm \Rightarrow l_1 = ۹۰۰ - ۵۶۸ = ۳۳۲ mm$$

۵-۱۶. یک موتور به قدرت ۷۵ کیلووات توسط چرخ‌دندهٔ A محوری را با سرعت ۲۶/۵ دور در دقیقه می‌چرخاند. چرخ‌دنده‌های مورب B و C همزن یک مخلوط کنندهٔ سیمان لاستیکی را به دوران در می‌آورند. اگر توان مصرفی همزن متصل به چرخ‌دندهٔ B مساوی ۲۵ کیلووات و چرخ‌دندهٔ C مساوی ۵۰ کیلووات باشد، قطر لازم برای محور را تعیین کنید. تنش برشی مجاز محور جلوگیری شده است. اگر ضریب ارتجاعی برشی مساوی $۰/۸۴ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، زاویه پیچش قسمت چپ محور را تعیین نمایید.

$$T_B = ۹۵۴۰ \times \frac{۲۵}{۲۶/۵} = ۹۰۰۰ N.m$$

$$T_A = ۹۵۴۰ \times \frac{۵۰}{۲۶/۵} = ۱۸۰۰۰ N.m$$



مسأله ۵-۱۶

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau} \qquad \left(\frac{J}{c}\right)_{left} = \frac{۹ \times ۱۰^۶ (N.mm)}{۴۰} = ۲۲۵ \times ۱۰^۳$$

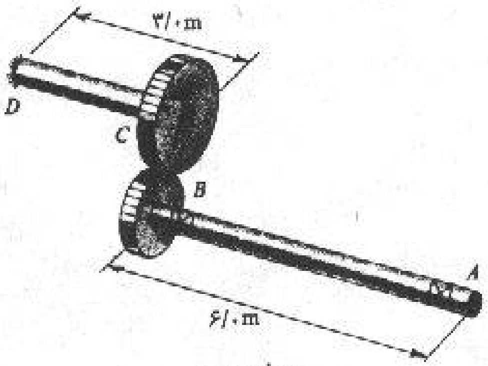
$$\frac{\pi}{۲} c_1^۳ = ۲۲۵ \times ۱۰^۳ \Rightarrow c_1 = ۵۲ \Rightarrow d_1 = ۱۰۴ mm$$

$$\left(\frac{J}{c}\right)_{right} = \frac{۱۸ \times ۱۰^۶}{۴۰} = ۴۵۰ \times ۱۰^۳$$

$$\frac{\pi}{۲} c_2^۳ = ۴۵۰ \times ۱۰^۳ \Rightarrow c_2 = ۶۵/۹ mm \Rightarrow d_2 = ۱۳۱/۸ mm$$

$$\varphi = \frac{TL}{Jc} = ۰/۰۵۶ \ (rad) = ۳/۲^\circ$$

۵-۱۷. دو محور فولادی به قطر ۵۰ میلی‌متر، توسط یک چرخ‌دنده به یکدیگر متصل شده‌اند، چرخ‌دندهٔ B دارای قطر ۲۰۰ میلی‌متر و چرخ‌دندهٔ C دارای قطر ۴۰۰ میلی‌متر می‌باشد. اگر انتهای D گیردار باشد، تحت اثر یک لنگر پیچشی مساوی ۵۶۰ نیوتن متر در A، میزان دوران انتهای A چقدر خواهد بود. ضریب ارتجاعی برشی G را مساوی $۰/۸۴ \times ۱۰^{۵}$ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.



مسأله ۵-۱۷

زاویه پیچش محور AB برابر است با:

$$\varphi_{A_1} = \frac{TL}{JG} = \frac{۵۶۰ \times ۱۰^{۳} \times ۶۰۰۰}{\frac{\pi}{۲}(۲۵)^{۴} \times ۰/۸۴ \times ۱۰^{۵}} = ۰/۰۶۴\,rad$$

اعمال لنگر ۵۶۰ $kN.m$ به قسمت AB باعث ایجاد لنگر ۱۱۲۰ $kN.m$ در CD خواهد شد.

$$T_c = \frac{۴۰۰}{۲۰۰} T_B = ۱۱۲۰$$

بنابراین زاویه پیچش محور CD عبارتست از:

$$\varphi_c = \frac{۱۱۲۰ \times ۱۰^{۳} \times ۳۰۰۰}{\frac{\pi}{۲}(۲۵)^{۴} \times ۰/۸۴ \times ۱۰^{۵}} = ۰/۰۶۴\,rad$$

به‌علت وجود سیستم چرخدنده بین دو شفت، دوران φ_c موجب می‌شود که شفت AB به‌مانند یک جسم صلب دوران کند. این دوران به نسبت قطر چرخدنده‌ها می‌باشد:

$$\varphi_{A_2} = ۲\varphi_c = ۰/۱۲۸\,rad$$

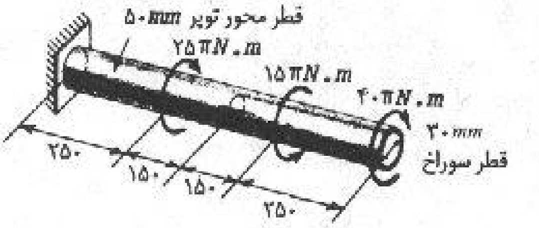
$$\varphi_A = \varphi_{A_1} + \varphi_{A_2} = ۰/۱۹۳\,rad \rightarrow \varphi_A = ۱۱^{\circ}$$

۵-۱۸. در مثال ۵-۸، چه لنگری باید به تنهایی بر نقطهٔ A اثر کند تا همان زاویهٔ پیچشی را در A تولید کند که لنگرهای پیچشی مؤثر بر نقاط B و D ایجاد می‌کردند.

$$T = Const \qquad \varphi = \sum \frac{TL}{JG}$$

$$۰/۰۲۳۳ = \frac{T}{G}\left[\left(\frac{۰/۵ + ۰/۳}{۵۷/۵ \times ۱۰^{-۸}}\right) + \left(\frac{۰/۲}{۳/۸۳ \times ۱۰^{-۶}}\right)\right] \Rightarrow T = ۲۸۱/۸۶\,N.m$$

۵-۱۹. (الف) مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی در محور نشان داده شده در شکل. (ب) مطلوب است تعیین زاویه پیچش دو انتهای میله نسبت به یکدیگر. ضریب ارتجاعی برشی را مساوی $۰/۸۴ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌متر مربع در نظر بگیرید.



مسئله ۵-۱۹

مقاطع ۱ و ۲ دارای شرایط هندسی یکسانی هستند، بنابراین مقطع ۱ که کوپل بیشتری را حمل می‌کند بحرانی است. همچنین بین مقاطع ۳ و ۴ نیز مقطع ۴ بحرانی است.

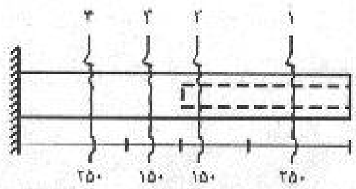
$$T_1 = ۴۰\pi \qquad T_2 = ۲۵\pi \quad T_3 = ۲۵\pi \quad T_4 = ۵۰\pi$$

الف)

$$\tau_1 = \frac{T_1 c}{J} = \frac{۴۰\pi \times ۱۰^۳ \times ۲۵}{\frac{\pi}{۳۲}(۵۰^۴ - ۳۰^۴)} = ۵/۸۸\, MPa$$

$$\tau_4 = \frac{T_4 c}{J} = \frac{۵۰\pi \times ۱۰^۳ \times ۲۵}{\frac{\pi}{۳۲} \times ۵۰^۴} = ۶/۴\, MPa$$

$$\tau_{max} = \tau_4 = ۶/۴\, MPa$$

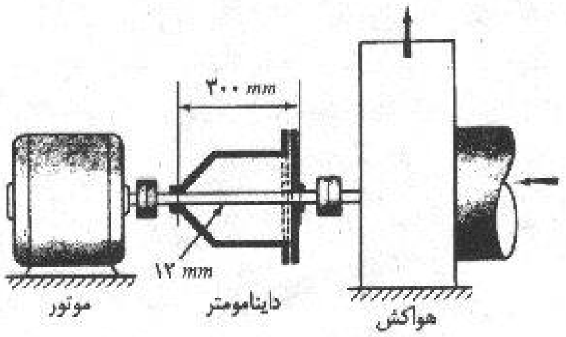


ب)

$$\varphi = \sum \frac{TL}{GJ} = \frac{۱}{۰/۸۴ \times ۱۰^۵}\left[\frac{۴۰\pi \times ۱۰^۳ \times ۲۵۰}{\frac{\pi}{۳۲}(۵۰^۴ - ۳۰^۴)} + \frac{۲۵\pi \times ۱۰^۳ \times ۱۵۰}{\frac{\pi}{۳۲}(۵۰^۴ - ۳۰^۴)} + \frac{۲۵\pi \times ۱۰^۳ \times ۱۵۰}{\frac{\pi}{۳۲}۵۰^۴}\right.$$

$$\left. + \frac{۵۰\pi \times ۱۰^۳ \times ۲۵۰}{\frac{\pi}{۳۲}۵۰^۴}\right] \Rightarrow \varphi = ۱/۹۵ \times ۱۰^{-۳} rad = ۰/۱۱^\circ$$

۵-۲۰. برای تعیین توان لازم برای دوران پره‌های یک هواکش با سرعت ۲۰ هرتز از یک دینامومتر استفاده می‌کنیم. دینامومتر از یک محور استوانه‌ای توپر به قطر ۱۲ میلی‌متر که دو دیسک به فاصلهٔ ۳۰۰ میلی‌متر از یکدیگر روی آن نصب شده‌اند، تشکیل یافته است. یکی از این دیسکها به صورت یک شیپوره می‌باشد که یک انتهایش به میله بسته شده است و انتهای دیگر آن در مقابل دیسک دوم قرار دارد. در حین دوران، زاویهٔ چرخش نسبی این دو دیسک مساوی ۶ درجه اندازه‌گیری شده است. توان داده شده به پره‌های هواکش را بر حسب کیلووات تعیین کنید. ضریب ارتجاعی برشی محور را $۰/۸۴ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.

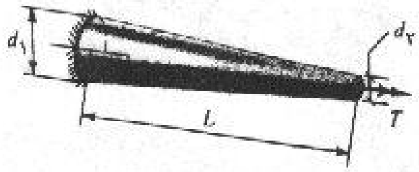


مسأله ۵-۲۰

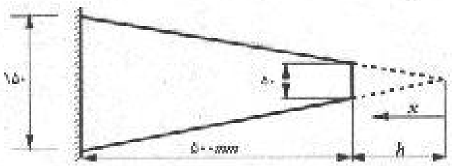
$$T = ۹۵۴۰ \frac{P}{۲۰ \times ۶۰} N.m$$

$$\varphi = \frac{TL}{JG} \Rightarrow ۶ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۹۵۴۰ \frac{P}{۱۲۰۰} \times ۰/۳}{\frac{\pi}{۳۲}(۰/۰۱۲)^۴ \times ۰/۸۴ \times ۱۰^{۱۱}} \Rightarrow P = ۷/۵ kW$$

۵-۲۱. یک محور فولادی توپر به شکل مخروط ناقص در یک انتها گیردار و در انتهای دیگر آزاد و تحت اثر لنگر پیچشی T قرار دارد (به شکل مراجعه کنید). مطلوب است تعیین زاویهٔ پیچش انتهای آزاد اگر $d_1 = ۱۵۰$ میلی‌متر، $d_2 = ۵۰$ میلی‌متر، $L = ۵۰۰$ میلی‌متر و $T = ۳۰۰۰$ نیوتن متر می‌باشد. فرض کنید که فرضیات مربوط به پیچش میله‌های استوانه‌ای در این حالت نیز صادق است. ضریب ارتجاعی برشی را مساوی $۰/۸۴ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.



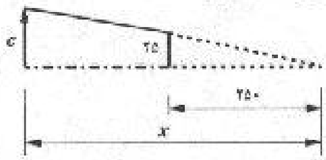
مسأله ۵-۲۱



$$\frac{h + ۵۰۰}{۱۵۰} = \frac{h}{۵۰} \Rightarrow h = ۲۵۰\,mm$$

$$\frac{c}{۲۵} = \frac{x}{۲۵۰} \Rightarrow c = \frac{x}{۱۰}$$

اگر c شعاع هر مقطع دلخواه باشد:

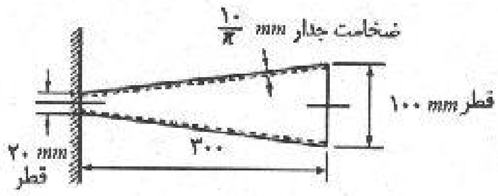


$$J = \frac{\pi}{۲} c^۴ = \frac{\pi}{۲} \left(\frac{x}{۱۰}\right)^۴ = \frac{\pi x^۴}{۲ \times ۱۰^۴}$$

$$\varphi = \int \frac{Tdx}{JG} = \frac{۳۰۰۰}{۰/۸۴ \times ۱۰^{۱۱}} \times \frac{۲ \times ۱۰^۴}{\pi} \int_{۰/۲۵}^{۰/۷۵} \frac{dx}{x^۴} \Rightarrow \varphi = ۴/۶ \times ۱۰^{-۳}\ rad$$

$$\varphi = ۰/۲۶۷^\circ$$

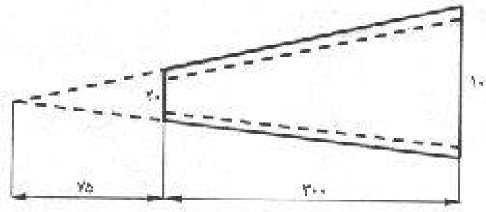
۵-۲۲. یک مخروط ناقص جدار نازک دارای ابعاد نشان داده شده در شکل می‌باشد. مطلوب است تعیین سختی پیچشی این عضو (سختی پیچشی عبارت است از مقدار لنگر پیچشی لازم برای دوران واحد) ضریب ارتجاعی برشی مساوی G می‌باشد.



مسأله ۵-۲۲

ابعاد نامعلوم مشابه مسأله قبل محاسبه شده‌اند.

$$c = \frac{x}{۸}$$

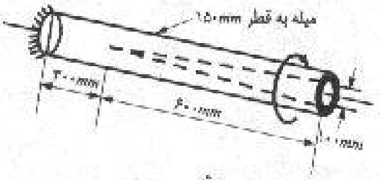


$$J = ۲\pi c^۳ t = ۲\pi \left(\frac{x}{۸}\right)^۳ \left(\frac{۱۰}{\pi}\right) = \frac{۵x^۳}{۱۲۸}$$

$$\varphi = \int \frac{Tdx}{JG} = \frac{T}{G} \int_{۷۵}^{۳۰۰} \frac{dx}{\frac{۵}{۱۲۸}x^۳} = \frac{T}{\left(\frac{۵}{۱۲۸}\right)G} (۸/۳۳۳ \times ۱۰^{-۵})$$

$$\varphi = ۱\, rad \Rightarrow T = ۴۶۸۰۷۵G$$

۵-۲۳. یک محور استوانه‌ای به قطر ۱۵۰ میلی‌متر که از مصالح ارتجاعی - خطی می‌باشد، دارای یک سوراخ به شکل مخروط و به طول ۶۰۰ میلی می‌باشد (مطابق شکل). این محور در یک انتها گیردار و در انتهای آزادش تحت اثر لنگر پیچشی T می‌باشد. مطلوب است تعیین حداکثر زاویهٔ پیچش محور.



مسأله ۵-۲۳

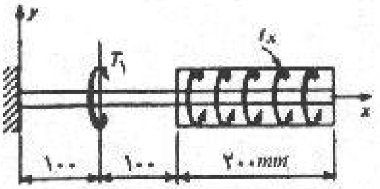
$$\varphi = \int \frac{Tdx}{JG} = \frac{T \times ۰/۳}{\frac{\pi\,(۰/۱۵)^۴}{۳۲}.\,G} + \int_۰^{۰/۶} \frac{Tdx}{\frac{\pi}{۳۲}\left[(۰/۱۵)^۴ - \left(\frac{x}{۶}\right)^۴\right] G}$$

$$= \frac{۱/۹ \times ۱۰^۴ T}{\pi G} + \frac{۳۲ \times ۶^۴ T}{\pi G} \int_۰^{۰/۶} \frac{dx}{(۰/۹)^۴ - x^۴}$$

$$= \frac{۱/۹ \times ۱۰^۴ T}{\pi G} + \frac{۳۲ \times ۶^۴ T}{\pi G} \left(\frac{۱}{۲ \times (۰/۹)^۳}\right)\left[\frac{۱}{۲} \ln \left(\frac{۰/۹ + x}{۰/۹ - x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x}{۹}\right)\right]_۰^{۰/۶}$$

$$= \frac{۱/۹ \times ۱۰^۴ T}{\pi G} + \frac{۳/۹۶ \times ۱۰^۴ T}{\pi G} = \frac{۵/۸۶ \times ۱۰^۴ T}{\pi G}$$

۲۴-۵. محور متهای به شکل استوانه با سختی پیچشی ثابت I_{JG}، در حین عمل سوراخکاری، تحت اثر لنگر پیچشی متمرکز $T_1 = -۱۰۰$ نیوتن متر و لنگر پیچشی گستردهٔ یکنواخت $T_x = ۵۰۰$ نیوتن متر بر متر مطابق شکل قرار گیرد. مطلوب است تعیین زاویهٔ پیچش انتهای آزاد مته. همچنین ترسیمهٔ تغییرات لنگر پیچشی $T(x)$ و ترسیمهٔ تغییرات زاویه پیچش $\phi(x)$ را رسم نمایید.



مسئله ۵-۲۴

$$JG\frac{d\varphi}{dx} = -t_x = ۱۰۰\langle x - ۰/۱\rangle - ۵۰۰\langle x - ۰/۲\rangle^۰$$

$$T = JG\frac{d\varphi}{dx} = ۱۰۰\langle x - ۰/۱\rangle^۰ - ۵۰۰\langle x - ۰/۲\rangle^۱ + c_1$$

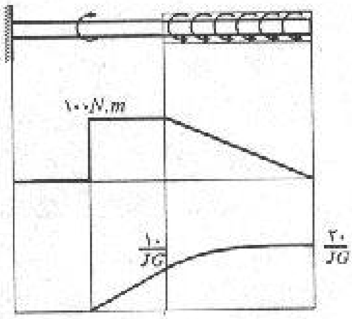
$$T(۰) = ۰ \longrightarrow c_1 = ۰$$

$$JG\,\varphi = ۱۰۰\langle x - ۰/۱\rangle^۱ - ۲۵۰\langle x - ۰/۲\rangle^۲ + c_2$$

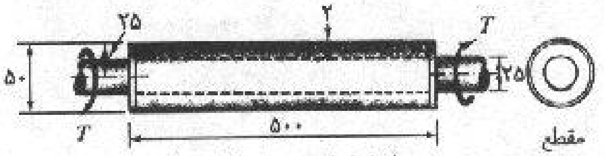
$$\varphi(۰) = ۰ \longrightarrow c_2 = ۰$$

$$\varphi(x) = \frac{۱}{JG}\left[۱۰۰\langle x - ۰/۱\rangle^۱ - ۲۵۰\langle x - ۰/۲\rangle^۲\right]$$

$$\varphi(۰/۴) = \frac{۲۰}{JG}$$



۲۵-۵. یک لولهٔ استوانهای به قطر خارجی ۵۰ میلیمتر و ضخامت جدارهٔ ۲ میلیمتر در دو انتهای خود توسط فلانجهای صلب به یک محور استوانهای توپر ممتد به قطر ۲۵ میلیمتر متصل شده است. (به شکل مسأله مراجعه کنید). اگر لوله و محور استوانهای توپر هر دو از مصالح ارتجاعی - خطی یکسانی ساخته شده باشند، چه قسمت از لنگر پیچشی وارده T توسط لوله حمل میشود



(تمام ابعاد بر حسب میلی متر)

مسئله ۵-۲۵

$$\varphi_s = \varphi_t \qquad \frac{T_s L}{J_s G} = \frac{T_t L}{J_t G}$$

$$\frac{T_s}{T_t} = \frac{J_s}{J_t} = \frac{\dfrac{\pi(۰/۰۲۵)^۴}{۳۲}}{۲\pi\left(\dfrac{۰/۰۵}{۲}\right)^۳(۰/۰۰۲)} = ۰/۱۹۵ \Rightarrow T_s = ۰/۱۹۵ T_t$$

$$T_s + T_t = T \Rightarrow ۰/۱۹۵ T_t + T_t = T \Rightarrow T_t = ۰/۸۳۷ T$$

۵-۲۶. اگر لوله خارجی مثال قبل از آلمینیوم و محور استوانه‌ای توپر از فولاد ساخته شده باشد، چه لنگر پیچشی می‌تواند به این مجموعه وارد گردد به طوری که تنش برشی در لولهٔ آلمینیومی از ۱۰۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع تجاوز نکند. ضریب ارتجاعی برشی فولاد را $۰/۸۴ \times ۱۰^۵$ و ضریب ارتجاعی برشی آلمینیوم را $۰/۲۸ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع فرض کنید. زاویهٔ پیچش لوله آلمینیومی در طول ۵۰۰ میلی‌متری آن تحت اثر لنگر پیچشی فوق چقدر است.

$$\varphi_s = \varphi_t \Rightarrow \frac{T_s}{T_t} = \frac{J_s G_s}{J_t G_t} = ۰/۱۹۵\left(\frac{۸۴}{۲۸}\right) = ۰/۵۸۶$$

$$T_s + T_t = T \Rightarrow ۰/۵۸۶ T_t + T_t = T \Rightarrow T_t = ۰/۶۳۱ T$$

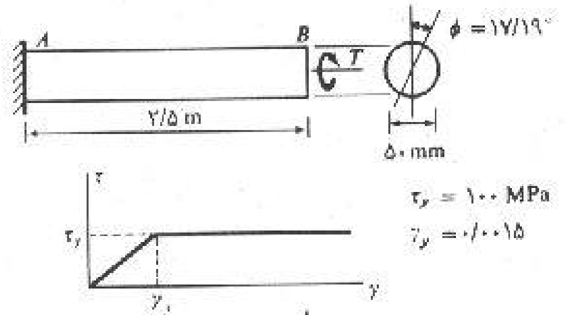
$$\tau_{max} = \frac{T_t c_t}{J_t} \Rightarrow ۱۰۰ \times ۱۰^۶ = \frac{(۰/۶۳۱)T \times ۰/۰۲۵}{۱/۹۶ \times ۱۰^{-۷}} \Rightarrow T = ۱/۲۵ kN.m$$

$$\varphi = \frac{TL}{JG} = \frac{\tau_{max}}{c_t}\left(\frac{L}{G}\right) = \frac{۱۰۰ \times ۱۰^۶}{۰/۰۲۵}\left(\frac{۰/۵}{۲۸ \times ۱۰^۹}\right) = ۰/۰۷۱۴(rad) = ۴/۰۹^\circ$$

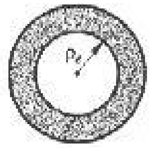
۵-۲۷. یک نمونهٔ فولادی به شکل استوانهٔ توپر به قطر ۲۰ میلی‌متر و طول ۴۵۰ میلی‌متر در لنگر پیچشی ۹۰۰ نیوتن متر گسیخته می‌شود. اساس گسیختگی فولاد فوق در پیچش چقدر است.

$$\tau = \frac{TC}{J} = \frac{۹۰۰(۱۰ \times ۱۰^{-۳})}{\dfrac{\pi}{۲}(۱۰ \times ۱۰^{-۳})^۴} = ۵/۷۳ \times ۱۰^۸ Pa = ۵۷۳ MPa$$

۵-۲۸. یک محور استوانه‌ای به قطر ۵۰ میلی‌متر و طول ۲/۵ متر مفروض است. یک انتهای این محور گیردار و انتهای آزاد آن به اندازهٔ $\phi = ۱۷/۱۹$ درجه دوران نموده است. چه لنگر پیچشی T در انتهای آزاد این محور تأثیر کرده که این زاویهٔ پیچش تولید شده است. مشخصات مکانیکی ایده‌ال مصالح در شکل نشان داده شده است.



مسأله ۵-۲۸



$$۰ \leqslant \rho \leqslant \rho_e \; : \; \tau = \frac{\rho}{\rho_e}\tau_y$$

$$\rho \geqslant \rho_e \; : \; \tau = \tau_y$$

$$\rho_e\varphi = \gamma_y L \Rightarrow \rho_e = \frac{\gamma_y L}{\varphi} = \frac{۰/۰۰۱۵ \times ۲۵۰۰}{۱۷/۱۹\,\dfrac{\pi}{۱۸۰}} = ۱۲/۵\,mm$$

$$T = \int \tau\rho dA = \int \tau\rho(۲\pi\rho)d\rho = \int_۰^{۱۲/۵} ۲\pi\,(\frac{\tau_y}{\rho_e})\rho^۳ d\rho + \int_{۱۲/۵}^{۲۵} \tau_y \times ۲\pi\rho^۲ d\rho$$

$$= ۱۶\pi\int_۰^{۱۲/۵} \rho^۳ d\rho + ۲۰۰\pi\int_{۱۲/۵}^{۲۵} \rho^۲ d\rho = ۳۱۷۰\,N.m$$

۵-۲۹. یک محور استوانه‌ای توپر به قطر ۱۵۰ میلی‌متر در قسمتی از طولش توسط ماشین‌تراش داده شده به‌طوری که قطر آن به ۷۵ میلی‌متر رسیده است. اگر در نقطهٔ انتقال دو قطر، ماهیچه‌ای به شعاع ۱۲ میلی‌متر تعبیه شود، حداکثر تنش برشی به وجود آمده در محور استوانه‌ای در اثر لنگر پیچشی ۲۷۰۰ نیوتن متر چقدر است؟ اگر شعاع ماهیچه به ۳ میلی‌متر کاهش یابد، حداکثر تنش برشی چقدر خواهد بود.

ضریب تمرکز تنش پیچشی را از روی شکل (۵-۳) بدست می‌آوریم:

$$r = ۱۲\,mm \qquad \frac{r}{d} = \frac{۱۲}{۷۵} = ۰/۱۶$$

$$\frac{D}{d} = \frac{۱۵۰}{۷۵} = ۲$$

با استفاده از شکل (۵-۳): $K = ۱/۳$

$$\tau = K\frac{Tc}{J} = ۱/۳ \times \frac{۲۷ \times ۱۰^۵ \times ۳۷/۵}{\dfrac{\pi}{۲}(۳۷/۵)^۴} = ۴۲/۳۷\,MPa$$

$$r = ۳\,mm \qquad \frac{r}{d} = \frac{۳}{۷۵} = ۰/۰۴ \text{ و } \frac{D}{d} = ۲ \xrightarrow{\text{شکل (۵-۳)}} K = ۱/۸۵$$

$$\tau = \frac{۱/۸۵}{۱/۳} \times ۴۲/۳۷ = ۶۰/۳\,MPa$$

۵-۳۰. مطلوب است تعیین شعاع ماهیچه‌ای که لازم است در محل اتصال دو محور استوانه‌ای توپر به قطرهای ۱۵۰ و ۱۰۰ میلی‌متر ایجاد گردد تا این محور بتواند با تنش برشی مجاز ۵۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع، توانی معادل ۸۰ کیلووات را با سرعت ۱۰۰ دور در دقیقه انتقال دهد.

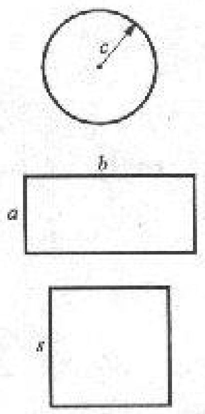
$$T = ۹۵۴۰ \times \frac{۸۰}{۱۰۰} = ۷۶۳۲ N.m$$

$$K = \frac{\tau J}{Tc} = \frac{۵۵ \times \frac{\pi}{۲}(۵۰)^۴}{۷۶۳۲ \times ۱۰^۳ \times ۵۰} = ۱/۴۲ \qquad \frac{D}{d} = \frac{۱۵۰}{۱۰۰} = ۱/۵$$

با استفاده از شکل (۵-۳) و نیز مقادیر محاسبه شده K و $\frac{D}{d}$ داریم:

$$\frac{r}{d} = ۰/۱۲ \Rightarrow r = ۱۲mm$$

۵-۳۱. تنش برشی حداکثر و زاویه پیچش سه میله با طول مساوی و مقطع مربع، مربع مستطیل و دایره با مساحت مساوی را مقایسه کنید. تمام میله‌ها تحت اثر لنگر پیچشی یکسانی قرار دارند. قطر مقطع دایره‌ای، ۱۰۰ میلی‌متر و پهنای مقطع مستطیل ۲۵ میلی‌متر می‌باشد. برای مقطع مربع، $\alpha = ۰/۲۰۸$ و $\beta = ۰/۱۴۱$ و برای مقطع مربع مستطیل $\alpha \approx \beta \approx \frac{۱}{۳}$ می‌باشد.



$$A_c = \pi c^۲ = \pi(۵۰)^۲ = ۷۸۵۴ mm^۲$$

$$A_R = a.b = ۲۵ \times b = ۷۸۵۴ \longrightarrow b = ۳۱۴/۲ mm$$

$$A_s = s^۲ = ۷۸۵۴ \longrightarrow s = ۸۸/۶$$

$$\frac{\tau_c}{\tau_s} = \frac{\frac{Tc}{J}}{\frac{T}{\alpha_s s^۳}} = \frac{\alpha_s s^۳ c}{J} = \frac{۰/۲۰۸ \times (۸۸/۶)^۳ \times ۵۰}{\frac{\pi}{۲} ۵۰^۴} = ۰/۷۴$$

$$\frac{\tau_R}{\tau_s} = \frac{\frac{T}{\alpha_R b a^۲}}{\frac{T}{\alpha_s s^۳}} = \frac{\alpha_s s^۳}{\alpha_R b a^۲} = \frac{۰/۲۰۸ \times (۸۸/۶)^۳}{\frac{۱}{۳} \times ۳۱۴/۲ \times ۲۵^۲} = ۲/۲۱$$

پس بین تنشهای برشی حداکثر نسبت زیر برقرار است:

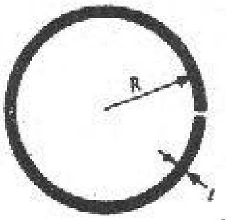
$$\tau_s : \tau_c : \tau_R = ۱ : ۰/۷۴ : ۲/۲۱$$

$$\frac{\varphi_c}{\varphi_s} = \frac{\frac{TL}{JG}}{\frac{TL}{\beta_s s^۴ G}} = \frac{۰/۱۴۱\,(۸۸/۶)^۴}{\frac{\pi}{۲}(۵۰)^۴} = ۰/۸۸۶$$

$$\frac{\varphi_R}{\varphi_s} = \frac{\beta_s s^۴}{\beta_R a^۳ b} = \frac{۰/۱۴۱\,(۸۸/۶)^۴}{\frac{۱}{۳} \times (۲۵)^۳ (۳۱۴/۲)} = ۵/۳۲$$

$$\varphi_s : \varphi_c : \varphi_R = ۱ : ۰/۸۸۶ : ۵/۳۲$$

۵-۳۲. مطلوب است مقایسه مقاومت و سختی پیچشی یک لولهٔ جدار نازک استوانه‌ای از مصالح ارتجاعی خطی در دو حالت یکی وقتی که لوله دارای یک درز طولی می‌باشد و دیگر وقتی که این درز توسط جوش پر شده است.

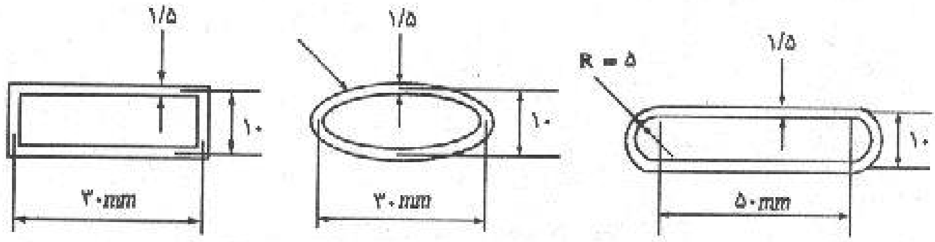


مسئله ۵-۳۲

$$\frac{\tau_s}{\tau}=\frac{\dfrac{T}{\alpha_s bc^2}}{\dfrac{TR}{J}}=\frac{J}{R\alpha_s bc^2}=\frac{2\pi R^3 t}{R(0/33)(2\pi R)t^2}=\frac{3R}{t}$$

$$\frac{T_s}{T}=\frac{\dfrac{\varphi G\beta bc^3}{L}}{\dfrac{\varphi GJ}{L}}=\frac{\beta bc^3}{J}=\frac{0/33\times(2\pi R)\times t^3}{2\pi R^3 t}=\frac{t^2}{3R^2}$$

۵-۳۳ تا ۵-۳۵. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی تولید شده در اعضایی با مقطع نشان داده شده در اشکال زیر تحت اثر لنگر پیچشی ۵۰ نیوتن متر. از تمرکز تنش صرف‌نظر کنید.



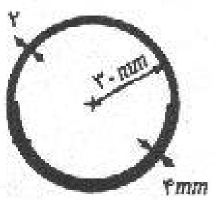
مسئله ۵-۳۳ مسئله ۵-۳۴ مسئله ۵-۳۵

$$\tau=\frac{T}{2At}=\frac{50\times10^3}{2\times(30\times10)\times1/5}=55/55\,MPa$$

$$\tau=\frac{T}{2At}=\frac{50\times10^3}{2\times(\pi\times15\times5)\times1/5}=70/74\,MPa$$

$$\tau=\frac{T}{2At}=\frac{50\times10^3}{2\times\left[50\times10+\pi(4/25)^2\right]}=30\,MPa$$

۵-۳۶. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی و زاویه پیچش واحد طول در عضوی با مقطع نشان داده شده در شکل زیر تحت اثر لنگر پیچشی ۱۰۰ نیوتن متر. از تمرکز تنش صرف‌نظر کنید. در مورد مزیت به دست آمده در اثر افزایش ضخامت جداره در قسمتی از مقطع، بحث کنید.



مسئله ۵-۳۶

$$A = \pi\,(۳۰)^۲ = ۲۸۲۷/۴\,mm^۲$$

$$q = \frac{T}{۲A} = \frac{۱۰۰ \times ۱۰^۳}{۲ \times ۲۸۲۷/۴} = ۱۷/۶۸\,N/mm \qquad \tau_{max} = \frac{q}{t_{min}} = \frac{۱۷/۶۸}{۲} = ۸/۸۴\,MPa$$

$$\theta = \frac{T}{۴A^۲G}\oint \frac{ds}{t} = \frac{۱۰۰ \times ۱۰^۳}{۴ \times (۲۸۲۷/۴)^۲\,G}\left(\frac{۳۰\pi}{۲} + \frac{۳۰\pi}{۴}\right) = \frac{۲/۲۱ \times ۱۰^{-۶}}{G}\,rad/mm$$

$$\theta = \frac{۲/۲۱ \times ۱۰^{-۳}}{G}\,rad/m$$

۵-۳۷. اتصال لبه‌دار (فلانجی) یک محور انتقال‌دهندهٔ لنگر پیچشی از ۶ پیچ به قطر ۲۵ میلی‌متر که در محیط دایره‌ای به قطر ۲۰۰ میلی‌متر قرار دارند، تشکیل یافته است. اگر این اتصال تحت اثر لنگر پیچشی ۲۰ کیلونیوتن‌متر ترار داشته باشد، مطلوب است تعیین تنش پیچشی تولید شده در پیچها.

$$F = \frac{T}{r.n} = \frac{۲۰}{۰/۱ \times ۶} = ۳۳/۳۳\,kN$$

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{۳۳۳۳۰}{\frac{\pi}{۴}\,(۰/۲۵)^۲} = ۶۷/۹۱\,MPa$$

۵-۳۸. اتصال لبه‌دار (فلانجی) یک محور انتقال‌دهندهٔ لنگر پیچشی از ۸ پیچ اعلا به قطر ۲۰ میلی‌متر که در محیط دایره‌ای به قطر ۲۴۰ میلی‌متر قرار دارند، تشکیل یافته است. (الف) مطلوب است محاسبه لنگر پیچشی قابل انتقال توسط این اتصال در صورتی که تنش مجاز برشی پیچها ۷۵۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد (ب)، در صورتی که محور و اتصال مزبور با سرعت ۲۵۰ دور در دقیقه دوران داشته باشند، مطلوب است تعیین توان انتقال یافته توسط اتصال برحسب کیلووات.

$$T = \sum Fr = \sum (\tau A)\,.\,r = ۸\left[۷۵۰ \times ۱۰^۶ \times \pi(۰/۰۱)^۲\right] \times ۰/۱۲ = ۲۲۶/۲\,kN.m$$

$$T = \frac{۹۵۴۰P}{n} \Rightarrow P = \frac{۲۲۶/۲ \times ۱۰^۳ \times ۲۵۰}{۹۵۴۰} = ۵۹۲۷/۵\,kW$$

۵-۳۹. اتصال لبه‌دار (فلانجی) یک محور انتقال‌دهندهٔ لنگر پیچشی از ۶ پیچ با سطح مقطع ۱۳۰ میلی‌متر مربع که در محیط دایره‌ای به قطر ۲۰۰ میلی‌متر و ۶ پیچ با مقطع ۳۲۰ میلی‌مترمربع که در روی دایره‌ای به قطر ۱۲۰ میلی‌متر قرار دارند، تشکیل یافته است. اگر تنش برشی مجاز در پیچ ۱۱۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، ظرفیت لنگر پیچشی مقطع چقدر می‌باشد.

ابتدا نیروی مجاز هر پیچ را برای هر دو نوع پیچ محاسبه می‌کنیم:

$$F = A \times \tau_{all}$$

$$F_۱ = ۱۳۰ \times ۱۱۰ = ۱۴۳۰۰\,N \qquad F_۲ = \frac{۶۰}{۱۰۰}\,۳۲۰ \times ۱۱۰ = ۲۱۱۲۰\,N$$

$$T = \sum Fr = ۶ \times (۱۴۳۰۰ \times ۰/۱) + ۶ \times (۲۱۱۲۰ \times ۰/۰۶) = ۱۶/۱۸\,kN.m$$

۵-۴۰. اتصال لبه‌دار (فلانجی) یک محور انتقال دهندهٔ لنگر پیچشی از ۶ پیچ آلمینیومی به قطر ۲۰ میلی‌متر که در محیط دایره‌ای به شعاع ۱۷۵ میلی‌متر و ۶ پیچ فولادی به قطر ۲۰ میلی‌متر که در محیط دایره‌ای به شعاع ۱۲۵ میلی‌متر قرار دارند، تشکیل یافته است. ظرفیت لنگر پیچشی این اتصال چقدر می‌باشد. تنش برشی مجاز برای هر دو مصالح ۴۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی برشی آلمینیوم $۰/۲۸ \times ۱۰^۵$ و ضریب ارتجاعی برشی فولاد $۰/۸۴ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشند.

کرنش متناسب با فاصله از محور مرکزی می‌باشد $\gamma \propto r$

$$\frac{\tau_{st}}{\tau_{Al}} = \frac{G_{st} \cdot \gamma_{st}}{G_{Al} \cdot \gamma_{Al}} = \frac{۰/۸۴ \times ۱۰^۵ \times ۱۲۵}{۰/۲۸ \times ۱۰^۵ \times ۱۷۵} = ۲/۱۴$$

$$F_{st} > F_{Al}$$

$$F = \tau A$$

$$F_{st} = ۴۰ \times \pi (۱۰)^۲ = ۱۲/۵۷ kN$$

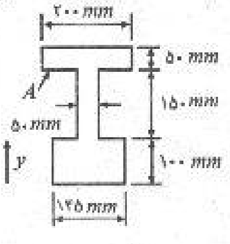
$$F_{Al} = \frac{۱}{۲/۱۴} \times ۴۰ \times \pi (۱۰^۲) = ۵/۸۷ kN$$

$$T = \sum Fr = ۶ \times (۱۲۵۷۰ \times ۰/۱۲۵ + ۵۸۷۰ \times ۰/۱۷۵) = ۱۵/۵۹ kN/m$$

مسائل فصل ششم

۶-۱ تا ۶-۵. مطلوب است تعیین لنگر ماند (ممان اینرسی) نیمرخهای نشان داده شده در شکل نسبت به محور افقی مار بر مرکز هندسی سطح (محور مرکزی افقی). برای تعیین مشخصات هندسی نیم‌رخهای نورد شده از جداول ضمیمه استفاده نمایید.

$$\sum Ay = ۵۰ \times ۲۰۰ \times ۲۷۵ + ۵۰ \times ۱۵۰ \times ۱۷۵ + ۱۴۵ \times ۱۰۰ \times ۵۰$$



مسئله ۶-۱

$$\sum Ay = ۴۷۸۷۵۰۰\, mm^۳$$

$$\sum A = ۵۰ \times ۲۰۰ + ۵۰ \times ۱۵۰ + ۱۴۵ \times ۱۰۰ = ۳۲۰۰۰\, mm^۲$$

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = ۱۵۰\, mm$$

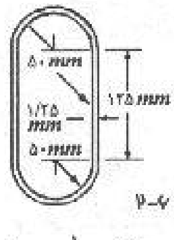
$$I = \sum (I_o + Ad^۲) \quad , \quad I_o = \frac{۱}{۱۲} bh^۳$$

$$I_۱ = \frac{۱}{۱۲} \times ۰/۲ \times (۰/۰۵)^۳ + (۰/۰۱)(۰/۱۲۵)^۲ = ۱/۵۸۳ \times ۱۰^{-۴} m^۴$$

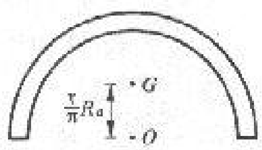
$$I_۲ = \frac{۱}{۱۲}(۰/۰۵)(۰/۱۵)^۳ + (۷/۵ \times ۱۰^{-۳})(۰/۰۲۵)^۲ = ۱/۸۸ \times ۱۰^{-۵} m^۴$$

$$I_۳ = \frac{۱}{۱۲}(۰/۱۴۵)(۰/۱)^۳ + (۰/۰۱۴۵)(۰/۱)^۲ = ۱/۵۷۱ \times ۱۰^{-۴} m^۴$$

$$I = \sum I_i = ۳/۳۴ \times ۱۰^{-۴} m^۴$$



مسئله ۶-۲



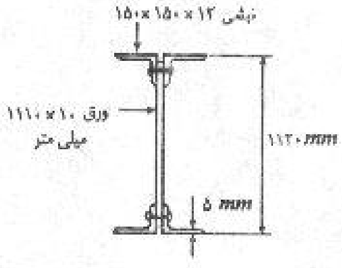
$$I_O = \frac{۱}{۲} \pi R_a^۳ t \qquad I_O = I_G + Ad^۲ \Rightarrow I_G = I_O - Ad^۲$$

$$I_G = \frac{\pi}{۲} R_a^۳ t - (\pi R_a t)\left(\frac{۲}{\pi} R_a\right)^۲ = ۰/۰۹۵ \pi R_a^۳ t$$

$$R_a = \frac{۵۰ + ۵۱/۲۵}{۲} = ۵۰/۶۲۵\, mm$$

$$I = ۲ \times \left[\frac{۱}{۱۲}(۱/۲۵)(۱۲۵)^۳\right] + ۲\left[(۰/۰۹۵)\pi(۵۰/۶۲۵)^۳(۱/۲۵)\right]$$

$$+ ۲\underbrace{\left[\pi(۵۰/۶۲۵)(۱/۲۵)\right]}_{A}\underbrace{\left[\frac{۱۲۵}{۲} + \frac{۲(۵۰/۶۲۵)}{\pi}\right]}_{d}^۲ = ۴/۰۷ \times ۱۰^۶\, mm^۴$$

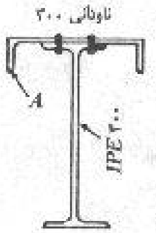


مسأله ۶-۳

از جدول ۱۰ ضمیمه مقدار ممان اینرسی نیمرخ نبشی ۱۲ × ۱۵۰ × ۱۵۰ برابر با $۷۳۷ cm^۴$ و سطح مقطع آن $۳۴/۸ cm^۲$ بدست می‌آید. بنابراین ممان اینرسی کل به طریق زیر محاسبه می‌شود:

$$e = ۴/۱۲ cm \qquad d = \frac{۱۱۲۰}{۲} - ۴۱/۲ = ۵۱۸/۸$$

$$I = \frac{۱}{۱۲} \times ۱۰(۱۱۱۰)^۳ + ۴ \times (۷۳۷ \times ۱۰^۴) + ۴(۳۴۸۰)(۵۱۸/۸)^۲ = ۴/۹۱۶ \times ۱۰^۹ mm^۴$$



مسأله ۶-۴

مشخصات مربوط به IPE ۴۰۰ و ناودانی ۳۰۰ به ترتیب از جداول ۴ و ۸ ضمیمه استخراج می‌شود.

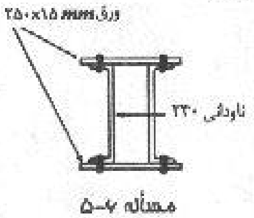
ناودانی ۳۰۰: $e = ۲/۷ cm = ۲۷ mm$

نیمرخ	$A (mm^۲)$	$y (mm)$	$Ay (mm^۳)$
IPE ۴۰۰	۸۴/۵ × ۱۰۰	۰	۰
ناودانی ۳۰۰	۵۸/۸ × ۱۰۰	۲۰۰ + ۱۰ − ۲۷ = ۱۸۳	$۱۰/۷۶ \times ۱۰^۵$
$\sum$	۱۴۳۳۰	—	$۱۰/۷۶ \times ۱۰^۵$

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{۱۰/۷۶ \times ۱۰^۵}{۱۴۳۳۰} = ۷۵/۱ mm$$

نیمرخ	$A (mm^۲)$	$d (mm)$	$A d^۲ (mm^۴)$	$I_o (mm^۴)$
IPE ۴۰۰	۸۴/۵ × ۱۰۰	۷۵/۱	$۴۷/۶۶ \times ۱۰^۶$	۲۳۱۳۰×۱۰^۴
ناودانی ۳۰۰	۵۸/۸ × ۱۰۰	۱۰۷/۹	$۶۸/۴۶ \times ۱۰^۶$	۴۹۵×۱۰^۴
$\sum$	—	—	$۱۱۶/۱۲ \times ۱۰^۶$	$۲۳۶/۲۵ \times ۱۰^۶$

$$I = \sum (I_o + A d^۲) = ۳۵۸/۳۷ \times ۱۰^۶ mm^۴$$



مسأله ۶-۵

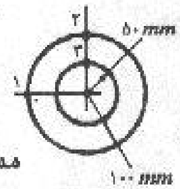
مشخصات ناودانی ۲۴۰ (از جدول ۸ ضمیمه):

$$A = ۴۲/۳\, cm^۲ \qquad I = ۳۶۰۰\, cm^۴ \qquad \text{ارتفاع} = ۲۴۰\, mm$$

$$I = ۲(۳۶۰۰ \times ۱۰^۴) + ۲\left[\frac{۱}{۱۲} \times ۲۵۰(۱۵)^۳ + (۲۵۰ \times ۱۵) \times \left(\frac{۲۴۰}{۲} + ۷/۵\right)^۲\right]$$

$$= ۱/۹۴ \times ۱۰^۸\, mm^۴$$

۶-۶ تا ۶-۱۰. بر مقاطع و نیمرخهای نشان داده شده در شکل، لنگر خمشی مثبتی معادل ۵۴۰۰۰ نیوتن متر در حول محور خنثی اثر می‌کند. مطلوب است تعیین تنشهای خمشی در نقاط نشان داده شده که توسط یک نقطهٔ پررنگ مشخص شده‌اند.



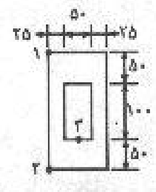
مسأله ۶-۶

$$I = \frac{\pi}{۴}(R^۴ - r^۴) = \frac{\pi}{۴}(۱۰۰^۴ - ۵۰^۴) = ۷۳/۶۳ \times ۱۰^۶\, mm^۴$$

$$\sigma_۱ = -\frac{My_۱}{I} = ۰$$

$$\sigma_۲ = -\frac{My_۲}{I} = -\frac{۵۴ \times ۱۰^۶ (N.mm) \times ۱۰۰ (mm)}{۷۳/۶۳ \times ۱۰^۶ (mm^۴)} = -۷۳/۳۴\, MPa \quad \text{(فشاری)}$$

$$\sigma_۳ = -\frac{My_۳}{I} = \frac{۱}{۲}\sigma_۲ = -۳۶/۶۷\, MPa \quad \text{(فشاری)}$$



مسأله ۶-۷

(ابعاد بر حسب میلی‌متر)

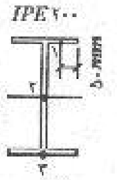
$$I = \frac{۱}{۱۲}BH^۳ - \frac{۱}{۱۲}bh^۳$$

$$= \frac{۱}{۱۲}(۱۰۰)(۲۰۰)^۳ - \frac{۱}{۱۲}(۵۰)(۱۰۰)^۳ = ۶۲/۵ \times ۱۰^۶\, mm^۴$$

$$\sigma_۱ = \frac{My_۱}{I} = -\frac{۵۴ \times ۱۰^۶ \times ۱۰۰}{۶۲/۵ \cdot ۱۰^۶} = -۸۶/۴\, MPa \quad \text{(فشاری)}$$

$$\sigma_۲ = -\frac{My_۲}{I} = +۸۶/۴\, MPa \quad \text{(کششی)}$$

$$\sigma_۳ = -\frac{My_۳}{I} = \frac{۱}{۲}\sigma_۲ = ۴۳/۲\, MPa \quad \text{(کششی)}$$



مسئله ۶-۸

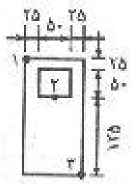
از جدول ۴ ضمیمه:

$$I = ۱۹۴۰\ cm^۴$$

$$\sigma_۱ = -\frac{۵۴ \times ۱۰^۶ \times (۱۰۰ - ۸/۵)}{۱۹۴۰ \times ۱۰^۴} = -۲۵۴/۷ MPa \quad \text{(فشاری)}$$

$$\sigma_۲ = ۰ \qquad (y_۲ = ۰)$$

$$\sigma_۳ = -\frac{My_۳}{I} = -\frac{۵۴ \times ۱۰^۶ \times (-۱۰۰)}{۱۹۴۰ \times ۱۰^۴} = +۲۷۸/۳ MPa \quad \text{(کششی)}$$

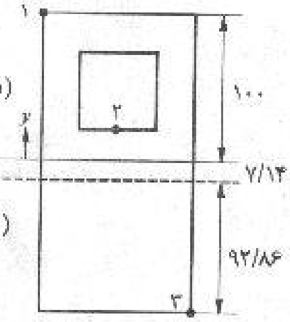


مسئله ۶-۹

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{(۲۰۰ \times ۱۰۰) \times ۰ - (۵۰ \times ۵۰) \times ۵۰}{۲۰۰ \times ۱۰۰ - ۵۰ \times ۵۰} = -۷/۱۴ mm$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۱۰۰)(۲۰۰)^۳ + (۱۰۰ \times ۲۰۰)(۷/۱۴)^۲ - \frac{۱}{۱۲}(۵۰ \times ۵۰)^۳ - (۵۰ \times ۵۰)(۵۷/۱۴)^۲$$

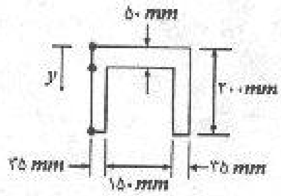
$$= ۵۹ \times ۱۰^۶ mm^۴$$



$$\sigma_۱ = -\frac{My_۱}{I} = -\frac{۵۴ \times ۱۰^۶ \times ۱۰۷/۱۴}{۵۹ \times ۱۰^۶} = -۹۸ MPa \quad \text{(فشاری)}$$

$$\sigma_۲ = -\frac{My_۲}{I} = -\frac{۵۴ \times ۱۰^۶ \times ۳۲/۱۴}{۵۹ \times ۱۰^۶} = -۲۹/۴ MPa \quad \text{(فشاری)}$$

$$\sigma_۳ = -\frac{My_۳}{I} = -\frac{۵۴ \times ۱۰^۶ \times (-۹۲/۸۶)}{۵۹ \times ۱۰^۶} = +۸۵ MPa \quad \text{(کششی)}$$



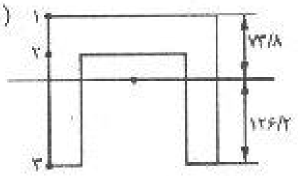
مسئله ۶-۱۰

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{۲ \times ۳۵ \times ۲۰۰ \times ۱۰۰ + ۱۵۰ \times ۵۰ \times ۲۵}{۲ \times ۳۵ \times ۲۰۰ + ۱۵۰ \times ۵۰} = ۷۳/۸ mm$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۱۵۰)(۵۰)^۳ + (۱۵۰ \times ۵۰)(۴۸/۸)^۲ + ۲ \times \frac{۱}{۱۲}(۳۵)(۲۰۰)^۳$$

$$+ ۲ \times (۳۵ \times ۲۰۰)(۲۶/۲)^{۲} = ۷۵/۷ \times ۱۰^{۶}\, mm^{۴}$$

$$\sigma_{۱} = -\frac{My_{۱}}{I} = -\frac{۵۴ \times ۱۰^{۶}\,(۷۳/۸)}{۷۵/۷ \times ۱۰^{۶}} = -۵۲/۶\, MPa$$ (فشاری)



$$\sigma_{۲} = -\frac{My_{۲}}{I} = -\frac{۵۴ \times ۱۰^{۶}\,(۲۳/۸)}{۷۵/۷ \times ۱۰^{۶}} = -۱۷\, MPa$$ (فشاری)

$$\sigma_{۳} = -\frac{My_{۳}}{I} = -\frac{۵۴ \times ۱۰^{۶}\,(-۱۲۶/۲)}{۷۵/۷ \times ۱۰^{۶}} = +۹۰\, MPa$$ (کششی)

۶-۱۱. مطلوب است تعیین اساس مقطع نیمرخهای $INP۲۶۰$ و $IPB۳۰۰$ و ناودانی ۲۰۰ براساس ابعاد آنها.

با استفاده از جداول ۳، ۶، ۸ ضمیمه مشخصات لازم استخراج می‌گردند.

$$INP۲۶۰ : I_{xx} = ۵۷۴۰\, cm^{۴}, \quad I_{yy} = ۲۸۸\, cm^{۴}, \quad h = ۲۶۰\, mm, \quad b = ۱۱۳\, mm$$

$$S_{xx} = \frac{I_{xx}}{c_{۱}} = \frac{۵۷۴۰}{\frac{۲۶}{۲}} = ۴۴۱/۵\, cm^{۳} \qquad S_{yy} = \frac{I_{yy}}{C_{۲}} = \frac{۲۸۸}{\frac{۱۱/۳}{۲}} = ۵۰/۹۷\, cm^{۳}$$

$$IPB۳۰۰ : I_{xx} = ۲۵۱۷۰\, cm^{۴}, \quad I_{yy} = ۸۵۶۰\, cm^{۴}, \quad h = ۳۰۰\, mm, \quad b = ۳۰۰\, mm$$

$$S_{xx} = \frac{۲۵۱۷۰}{\frac{۳۰}{۲}} = ۱۶۷۸\, cm^{۳} \qquad S_{yy} = \frac{۸۵۶۰}{\frac{۳۰}{۲}} = ۵۷۰/۷\, cm^{۳}$$

ناودانی ۲۰۰ : $I_{xx} = ۱۹۱۰\, cm^{۴}, \quad I_{yy} = ۱۴۸\, cm^{۴} \quad h = ۲۰۰\, mm, \quad b = ۷۵\, mm$

$$S_{xx} = \frac{۱۹۱۰}{\frac{۲۰}{۲}} = ۱۹۱\, cm^{۳} \qquad S_{yy} = \frac{I_{yy}}{b - e_{y}} = \frac{۱۴۸}{۷/۵ - ۲/۰۱} = ۲۷\, cm^{۳}$$

۶-۱۲. مطلوب است تعیین لنگر خمشی مجاز یک تیر چوبی با مقطع مربع مستطیل ۱۰۰ × ۵۰ میلیمتر در دو حالت زیر:

الف: وقتی که خمش در حول محور خنثای موازی با ضلع ۵۰ میلی متر اتفاق می‌افتد.

ب : وقتی که خمش در حول محور خنثای موازی با ضلع ۱۰۰ میلی متر اتفاق می‌افتد.

تنش مجاز چوب مساوی ۸/۴ نیوتن بر میلی متر مربع (مگاپاسگال) می‌باشد.

الف)

$$I = \frac{۱}{۱۲} bh^{۳} = \frac{۱}{۱۲} (۵۰)(۱۰۰)^{۳} = ۴/۱۷ \times ۱۰^{۶}\, mm^{۴} = ۴/۱۷ \times ۱۰^{-۶}\, m^{۴}$$

$$M = \frac{\sigma I}{c} = \frac{(۸/۴ \times ۱۰^{۶})(۴/۱۷ \times ۱۰^{-۶})}{۵۰ \times ۱۰^{-۳}} = ۷۰۱\, N.m$$

ب)
$$I = \frac{1}{12}(100)(50)^3 = 1/04 \times 10^6 mm^4 = 1/04 \times 10^{-6} m^4$$

$$M = \frac{(8/4 \times 10^6)(1/04 \times 10^{-6})}{25 \times 10^{-3}} = 349\, N.m$$

۶-۱۳. مطلوب است طراحی یک تیر از نیم‌رخ IPB که تحت لنگر خمشی ۳۰ کیلونیوتن‌متر قرار دارد، در دو حالت زیر:

الف: وقتی که خمش در حول محور $x-x$ اتفاق بیفتد.

ب: وقتی که خمش در حول محور $y-y$ اتفاق بیفتد.

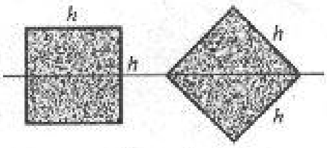
تنش خمشی مجاز را مساوی ۱۵۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.

$$S = \frac{M}{\sigma} = \frac{30 \times 10^6}{150} = 2 \times 10^5 mm^3 = 200\, cm^3$$

الف) با توجه به ستون مربوط به S_x جدول ۶ ضمیمه $IPB140$ مناسب می‌باشد.

ب) با توجه به ستون مربوط به S_y جدول ۶ ضمیمه $IPB200$ را می‌توان انتخاب نمود گرچه برای داشتن ضریب اطمینان می‌توان از $IPB220$ استفاده نمود.

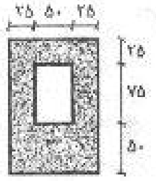
۶-۱۴. یک مقطع مربع در دو حالت نشان داده شده در حول محور $x-x$ تحت خمش قرار می‌گیرد. مطلوب است تعیین نسبت لنگر خمشی مجاز دو حالت در صورتی‌که تنش خمشی مجاز برای هر دو مقطع یکسان باشد.



مسأله ۶-۱۴

$$\left.\begin{aligned} \sigma = \frac{M_1 c_1}{I} &\rightarrow M_1 = \frac{\sigma I}{c_1} = \frac{\sigma I}{\frac{h}{2}} \\ \sigma = \frac{M_2 c_2}{I} &\rightarrow M_2 = \frac{\sigma I}{c_2} = \frac{\sigma I}{\frac{\sqrt{2}}{2}h} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{M_1}{M_2} = \sqrt{2}$$

۶-۱۵. یک قطعه از ماشین چدنی، که دارای مقطعی مطابق شکل می‌باشد، به صورت تیری که تحت‌لنگر خمشی مثبت است، عمل می‌نماید. اگر تنش خمشی فشاری مجاز ۸۰ مگاپاسکال و تنش خمشی کششی مجاز ۲۰ مگاپاسکال باشد، مطلوب است تعیین لنگر خمشی مجازی که می‌تواند بر تیر وارد شود. (ابعاد بر حسب میلی متر)



مسأله ۶-۱۵

$$\bar{y} = \frac{(100 \times 150)(75) - (50 \times 75)(87/5)}{100 \times 150 - 50 \times 75} = 70/83\, mm \qquad \text{بالای محور مرکزی}$$

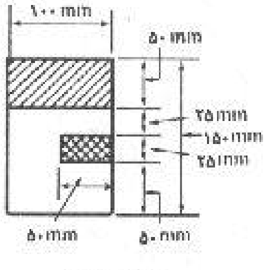
$$I = \frac{1}{12}(100)(150)^3 + (100 \times 150)(75 - 70/83)^2 - \frac{1}{12}(50)(75)^3$$
$$- (50 \times 75)(87/5 - 70/83)^2 = 25/59 \times 10^6 mm^4$$

$$M = \frac{\sigma I}{c}$$

$$M_T = \frac{۲۰ \times ۲۵/۵۹ \times ۱۰^۶}{۷۰/۸۳} = ۷۲۲۵/۷ N.m$$

$$M_C = \frac{۸۰ \times ۲۵/۵۹ \times ۱۰^۶}{۷۹/۱۷} = ۲۵۸۵۸/۳ N.m$$

پس لنگر خمشی مجاز $۷۲۲۵/۷ N.m$ می‌باشد.



مسئله ۶-۱۶

۶-۱۶. یک تیر که دارای مقطع مربع مستطیل توپری مطابق با ابعاد نشان داده شده در شکل می‌باشد، تحت لنگر خمشی مثبت ۱۶۰۰۰ نیوتن‌متر در حول محور افقی قرار دارد. (الف) مطلوب است تعیین برآیند نیروهای فشاری وارد بر مقطع سایه زده شده که در اثر لنگر خمشی تولید می‌شود. (ب) مطلوب است تعیین برآیند نیروهای کششی وارد بر سطح چهارخانه.

$$I = \frac{۱}{۱۲} bh^۳ = \frac{۱}{۱۲}(۱۰۰)(۱۵۰)^۳ = ۲۸/۱۲۵ \times ۱۰^۶ mm^۴$$

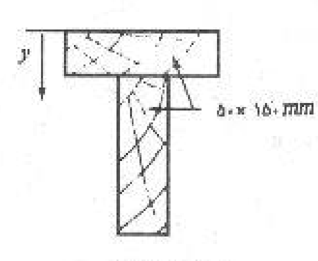
$$\sigma_{ave} = \frac{My_{ave}}{I} = \frac{۱۶ \times ۱۰^۶ \times ۵۰}{۲۸/۱۲۵ \times ۱۰^۶} = ۲۸/۴ MPa$$

$$C = \sigma_{ave} \times A = ۲۸/۴ \times (۵۰ \times ۱۰۰) = ۱۴۲/۲ kN$$

$$\sigma_{ave} = \frac{۱۶ \times ۱۰^۶ \times ۱۲/۵}{۲۸/۱۲۵ \times ۱۰^۶} = ۷/۱۱۱ MPa$$

$$T = \sigma_{ave} \times A = ۷/۱۱ \times (۲۵ \times ۵۰) = ۸/۹ kN$$

۶-۱۷. دو الوار چوبی به مقطع مستطیل ۱۵۰ × ۵۰ میلی‌متر، همانند شکل طوری به یکدیگر چسب شده‌اند، که تشکیل یک مقطع T بدهند. اگر به چنین مقطعی یک لنگر خمشی معادل ۳۱۰۰ نیوتن متر در حول محور افقی تأثیر کند، مطلوب است تعیین، (الف) تنشهای موجود در تارهای خارجی (لنگر ماند مقطع مساوی $۵۳/۱ \times ۱۰^۶$ میلی‌متر به توان چهار می‌باشد). (ب) برآیند نیروهای فشاری ناشی از تنشهای فشاری خمشی در ناحیهٔ بالای محور خنثی (پ) برآیند نیروهای کششی ناشی از تنشهای کششی خمشی در ناحیهٔ پایین محور خنثی و مقایسهٔ آن با جواب حالت (ب)

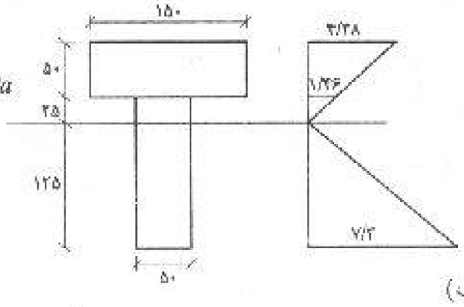


مسئله ۶-۱۷

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{(۱۵۰ \times ۵۰)(۲۵) + (۵۰ \times ۱۵۰)(۱۲۵)}{۲ \times ۱۵۰ \times ۵۰} = ۷۵ mm$$

الف)

$$\sigma_C = \frac{Mc_C}{I} = \frac{۳۱۰۰ \times ۱۰^۳ \times ۷۵}{۵۳/۱ \times ۱۰^۶} = ۴/۳۸\,MPa$$



$$\sigma_T = \frac{Mc_T}{I} = \frac{۳۱۰۰ \times ۱۰^۳ \times ۱۲۵}{۵۳/۱ \times ۱۰^۶} = ۷/۳\,MPa$$

$$\sigma_B = \frac{۲۵}{۷۵} \times ۴/۳۸ = ۱/۴۶\,MPa$$

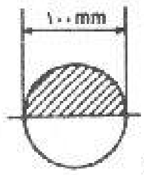
ب)

$$C = \sum \sigma_C \cdot A = \frac{۱}{۲}(۴/۳۸ + ۱/۴۶)(۵۰ \times ۱۵۰) + \frac{۱}{۲}(۱/۴۶)(۲۵ \times ۵۰) = ۲۲/۸\,kN$$

پ)

$$T = \frac{۱}{۲}(۷/۳)(۵۰ \times ۱۲۵) = ۲۲/۸\,kN$$

همانگونه که مشاهده می‌کنید برآیند نیروی فشاری با برآیند نیروی کشش در مقطع برابر است.



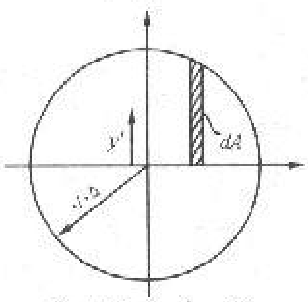
مسأله ۶-۱۸

۶-۱۸. اگر تیری با مقطع دایره (مطابق شکل)، تحت تأثیر لنگر خمشی منفی ۳۵۰۰ نیوتن متر در حول محور افقی قرار گیرد، مطلوب است تعیین مقدار و برآیند نیروهای به وجود آمده در ناحیهٔ سایه خورده با استفاده از انتگرال‌گیری.

$$dT = \frac{\sigma}{۲}\, dA$$

$$T = \int \frac{\sigma}{۲}\, dA = ۲\int_۰^{۰/۰۵} \frac{My}{۲I}\, y dx = \frac{M}{I}\int_۰^{۰/۰۵} (۰/۰۰۲۵ - x^۲)\, dx$$

$$= \frac{M}{I}\left(۰/۰۰۲۵x - \frac{x^۳}{۳}\right)\Bigg|_۰^{۰/۰۵} = \frac{۳۵۰۰}{\frac{\pi(۰/۰۵)^۴}{۴}}\left[۰/۰۰۲۵(۰/۰۵) - \frac{۰/۰۵^۳}{۳}\right]$$



$$x^۲ + y^۲ = ۰/۰۰۲۵$$

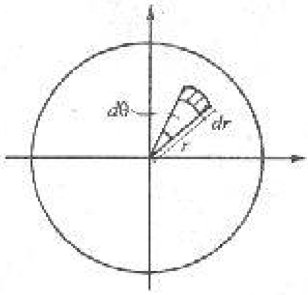
$$\Rightarrow T = ۵۹/۴\,kN$$

$$M = T \times ۲y' \quad \Rightarrow y' = \frac{M}{۲T}$$

$$= \frac{۳۵۰۰}{۲ \times ۵۹۴۰۰} = ۰/۰۲۹\,m = ۲۹\,mm$$

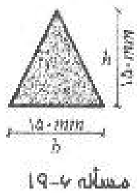
روش قطبی:

$$dT = \sigma dA = \frac{My}{I} r dr d\theta \qquad , \qquad y = r \sin\theta$$



$$T = \frac{M}{I}\int rSin\theta \, rdrd\theta = \frac{M}{I}\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۰/۰۵} r^{۲}\, Sin\theta drd\theta$$

$$\Rightarrow T = ۵۹۴۱۸۸$$



مسئله ۶-۱۹

۶-۱۹. اگر تیری با مقطع مثلث (مطابق شکل)، تحت تأثیر لنگر خمشی منفی ۴۰۰۰ نیوتن متر در حول محور افقی قرار گیرد، (الف) به وسیله انتگرال‌گیری نشان دهید که $I_{۰} = bh^{۳}/۳۶$ می‌باشد. (ب) مقدار و محل برآیند نیروهای فشاری و کششی ناشی از تنشهای فشاری و کششی خمشی را تعیین نمایید.

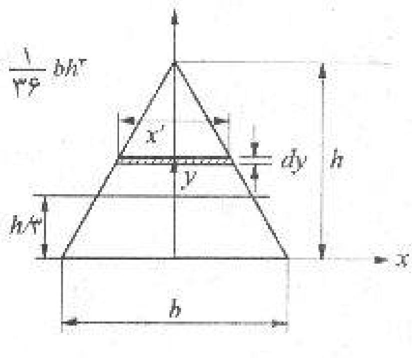
$$I_{xx} = \int y^{۲}\, dA \qquad x' = \frac{h-y}{h}b$$

$$dA = x'dy = b\left(\frac{h-y}{h}\right)dy = b\left(۱-\frac{y}{h}\right)dy$$

$$I_{xx} = b\int_{۰}^{h} y^{۲}\left(۱-\frac{y}{h}\right)dy = b\left(\frac{۱}{۳}y^{۳}-\frac{۱}{۴h}y^{۴}\right)\Big|_{۰}^{h} = b\left(\frac{۱}{۳}h^{۳}-\frac{۱}{۴}h^{۳}\right) = \frac{۱}{۱۲}bh^{۳}$$

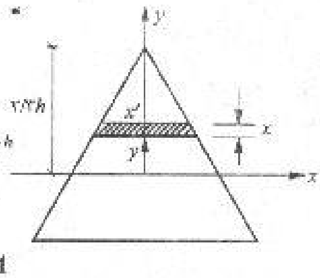
$$I_{xx} = I_{۰} + Ad^{۲} \qquad \Rightarrow \qquad I_{۰} = I_{xx} - Ad^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۱۲}bh^{۳} - \left(\frac{۱}{۲}bh\right)\left(\frac{h}{۳}\right)^{۲} = \frac{۱}{۱۲}bh^{۳} - \frac{۱}{۱۸}bh^{۳} = \frac{۱}{۳۶}bh^{۳}$$



$$T = \int \sigma dA \qquad dA = x'dy$$

$$\frac{x'}{\frac{۲}{۳}b} = \frac{\frac{۲}{۳}h - y}{\frac{۲}{۳}h} \Rightarrow x' = b\left(\frac{۲}{۳}-\frac{y}{h}\right)dy$$



$$T = \int\left(\frac{My}{I}\right)\cdot b\left(\frac{۲}{۳}-\frac{y}{h}\right)dy$$

$$= \frac{۳۶M}{h^{۳}}\int_{۰}^{\frac{۲}{۳}h} y\left(\frac{۲}{۳}-\frac{y}{h}\right)dy = \frac{۳۶M}{h^{۳}}\left(\frac{۱}{۳}y^{۲}-\frac{۲}{۳}\frac{y^{۳}}{h}\right)\Big|_{۰}^{\frac{۲}{۳}h}$$

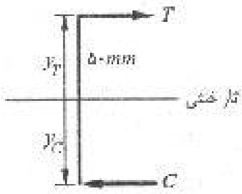
$$= \frac{۱۶M}{۹h} = \frac{۱۶\,(۴۰۰۰)}{۹\times ۰/۱۵} = ۴۷۴۰۰\,N \qquad y_T = \frac{\int \sigma y dA}{\int \sigma dA}$$

$$\int \sigma\, y dA = \frac{Mb}{I}\int_{\circ}^{\frac{۲}{۳}h} y^{۲}\left(\frac{۲}{۳}-\frac{y}{h}\right)dy = \frac{۳۶M}{h^{۳}}\left(\frac{۲}{۹}y^{۳}-\frac{۱}{۴}\frac{y^{۴}}{h}\right)\Big|_{\circ}^{\frac{۲}{۳}h} = \frac{۱۶}{۲۷}M = ۲۳۷۰/۳۷$$

$y_T = \frac{۲۳۷۰/۳۷}{۴۷۴۰۰} = ۰/۰۵m$ محل اثر برآیند نیروی کششی $۵۰\,mm$ بالای تار خنثی می‌باشد.

به‌خاطر وجود تعادل مقدار نیروی فشاری با نیروی کششی مساویست.

$C = T = ۴۷۴۰۰N$

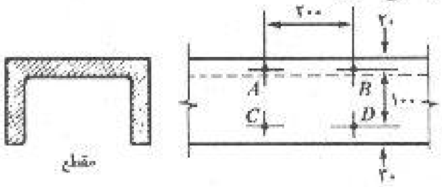


$$M = T(y_T + y_C) \quad\Rightarrow\quad y_T + y_C = \frac{M}{T} \quad\Rightarrow\quad y_C = \frac{M}{T} - y_T$$

$$y_C = \frac{۴۰۰۰}{۴۷۴۰۰} - ۰/۰۵ = ۰/۰۳۴۴$$

پس محل اثر برآیند نیروی فشاری $۳۴/۴\,mm$ زیر تار خنثی می‌باشد.

۶–۲۰. یک تیر چدنی با مقطع ناودانی شکل (مطابق شکل)، به عنوان یک تیر افقی یک ماشین عمل می‌کند. وقتی که نیروهای قائم بر این عضو وارد می‌شوند، طول AB به اندازهٔ ۰/۰۲ میلی‌متر افزایش و طول CD به اندازهٔ ۰/۱۸ میلی‌متر کاهش پیدا می‌کند. مطلوب است تعیین، (الف) جهت لنگر وارده، (ب) تنشهای قائم به وجود آمده در تارهای خارجی. ضریب ارتجاعی مساوی ۱×۱۰^{۵} نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.

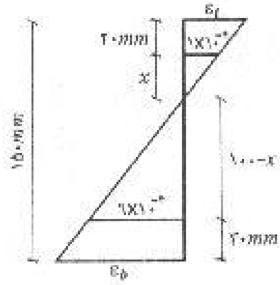


مسأله ۶–۲۰ (ابعاد بر حسب میلی متر)

چون در قسمت بالا کشش و قسمت پایین فشار ایجاد شده ممان اعمال شده منفی می‌باشد.

$$\varepsilon_{AB} = +\frac{۰/۰۲}{۲۰۰} = ۱\times۱۰^{-۴} \qquad \varepsilon_{CD} = -\frac{۰/۱۸}{۲۰۰} = -۹\times۱۰^{-۴}$$

$$\frac{۱\times۱۰^{-۴}}{۹\times۱۰^{-۴}} = \frac{x}{۱۰۰-x} \Rightarrow x = ۱۰\,mm$$



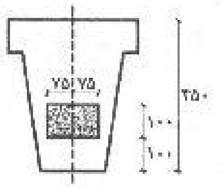
$$\frac{\varepsilon_t}{۳۰} = \frac{۱\times۱۰^{-۴}}{۱۰} \quad\Rightarrow\quad \varepsilon_t = ۳\times۱۰^{-۴}$$

$$\sigma_t = E\varepsilon_t = ۱\times۱۰^{۵}\times۳\times۱۰^{-۴} = ۳۰\,MPa$$

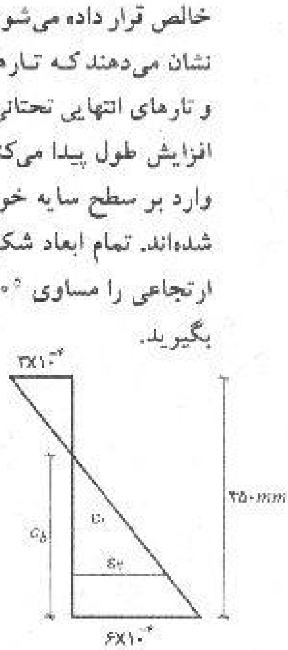
$$\frac{\varepsilon_b}{۱۲۰} = \frac{۹\times۱۰^{-۴}}{۹۰} \quad\Rightarrow\quad \varepsilon_b = ۱/۲\times۱۰^{-۳}$$

$$\sigma_b = E\varepsilon_b = ۱\times۱۰^{۵}\times۱/۲\times۱۰^{-۳} = ۱۲۰\,MPa$$

۶-۲۱. یک تیر فولادی توپر که مقطع آن مطابق شکل می‌باشد، در آزمایشگاه تحت تأثیر لنگر خمشی خالص قرار داده می‌شود. خمش در حول یک محور افقی اتفاق می‌افتد. وسایل اندازه‌گیری کرنش نشان می‌دهند که تارهای انتهایی فوقانی به اندازهٔ ۰/۰۰۰۳ میلی‌متر بر میلی‌متر کاهش و تارهای انتهایی تحتانی به اندازهٔ ۰/۰۰۰۶ میلی‌متر بر میلی‌متر افزایش طول پیدا می‌کنند. مطلوب است تعیین برآیند نیروهای وارد بر سطح سایه خورده در لحظه‌ای که کرنشها اندازه‌گیری شده‌اند. تمام ابعاد شکل بر حسب میلی‌متر می‌باشند و ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.



مسأله ۶-۲۱



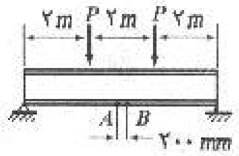
$$C_b = \frac{6}{9} \times 450 = 300\ mm$$

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = (2 \times 10^5)\left(\frac{100}{300} \times 6 \times 10^{-4}\right) = 40\ N/mm^2$$

$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 = (2 \times 10^5)\left(\frac{200}{300} \times 6 \times 10^{-4}\right) = 80\ N/mm^2$$

$$\sigma_{ave} = \frac{80 + 40}{2} = 60\ N/mm^2 \qquad P = \sigma_{ave} \cdot A = 60 \times (100 \times 150) = 900\ kN$$

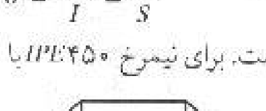
۶-۲۲. وقتی دو بار متمرکز مطابق شکل به یک تیر با نیمرخ فولادی $IPE450$ وارد می‌شوند، فاصله‌سنجی که بین دو نقطهٔ A و B نصب شده است، افزایش طولی به میزان ۰/۱۲ میلی‌متر نشان می‌دهد. مقدار نیروی وارده چقدر است. ضریب ارتجاعی فولاد را 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.



مسأله ۶-۲۲

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S}$$

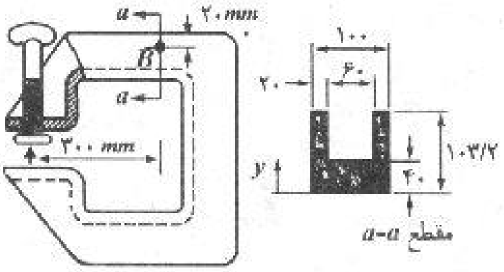
S مدول مقطع می‌باشد و از مشخصات نیمرخ بوده و در جداول موجود است. برای نیمرخ $IPE450$ با استفاده از جدول ۴ ضمیمه: $\quad S = 1500\ \ Cm^3$



$$M = \sigma S \ \rightarrow\ P \cdot \frac{L}{3} = E\varepsilon S \quad \Rightarrow \quad P \times 2000 = 2 \times 10^5 \times \frac{0/12}{200} \times 1500 \times 10^3$$

$$\Rightarrow\ P = 90\ kN$$

۶-۲۳. در گیرهٔ نشان داده شده، در اثر سفت کردن پیچ، کرنشی معادل 900×10^{-6} میلیمتر بر میلیمتر در نقطهٔ B اندازه‌گیری شده است. به ازای این کرنش چه نیرویی در پیچ موجود است. ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.



مسأله ۶-۲۳

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{(40 \times 100)(20) + 2(63.2 \times 20)(71.6)}{40 \times 100 + 2 \times 63.2 \times 20} \approx 40\, mm$$

$$I = \frac{1}{12}(100)(40)^3 + (100 \times 40)(20)^2 + 2\left[\frac{1}{12}(20)(63.2)^3 + (20 \times 63.2)(31.6)^2\right]$$

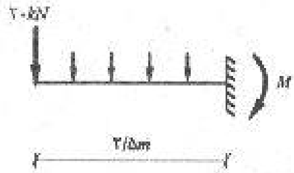
$$I = 5.5 \times 10^6\, mm^4$$

$$\sigma = E\varepsilon = 2 \times 10^5 \times 900 \times 10^{-6} = 180\, MPa$$

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{P.Ly}{I} \Rightarrow P = \frac{\sigma I}{Ly} = \frac{180 \times 5.5 \times 10^6}{300 \times (63.2 - 20)} = 76.39\, kN$$

۶-۲۴. در مثال ۶-۴، جهت نیروی متمرکز را عکس کنید و حداکثر تنشهای خمشی را در انتهای گیردار تیر به ازای $L = 2.5$ متر بدست آورید.

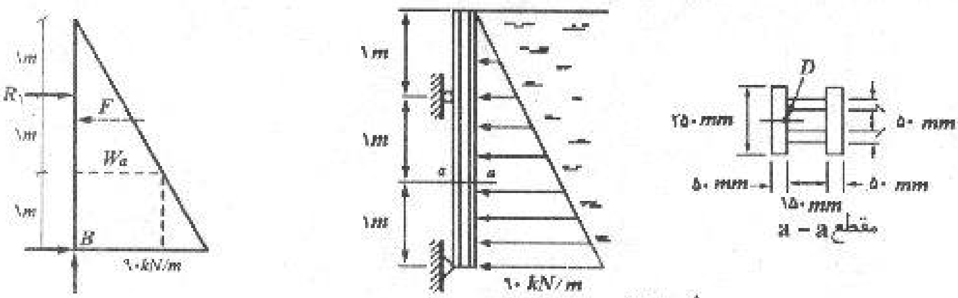
$$M = -20(2.5) - (0.75 \times 2.5)(1.25) = 52.3\, kN.m$$



$$I_{zz} = 16 \times 10^{-4}\, m^4$$

$$\sigma_{max} = \frac{52300 \times 0.2}{16 \times 10^{-2}} = 6537.5\, N/m^2$$

۶-۲۵. یکی از تیرهای تیپ یک سد کوچک، تحت تأثیر فشار ایستایی مایعات، مطابق شکل قرار دارد. مطلوب است تعیین تنش ناشی از خمش در نقطهٔ D از مقطع $a - a$



مسأله ۶-۲۵

$$\sum M_B = ۰ : R_۱ \times ۲ = \frac{۱}{۲}(۹۰)(۳)(۱) \rightarrow R_۱ = ۶۷/۵ kN$$

$$W_a = \frac{۲}{۳}(۹۰) = ۶۰ \, kN/m$$

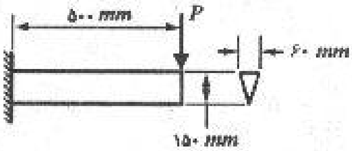
$$F = \frac{۱}{۲} \times ۶۰ \times ۲ = ۶۰ \, kN$$

$$M_{aa} = ۶۷/۵ \times ۱ - (\frac{۱}{۲} \times ۶۰ \times ۲) \times \frac{۲}{۳} = ۲۷/۵ \, kN.m$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۰/۲۵)(۰/۲۵)^۳ - \frac{۱}{۱۲}(۰/۱۵)(۰/۱۵)^۳ = ۲/۸۳ \times ۱۰^{-۴} m^۴$$

$$\sigma_D = \frac{My}{I} = \frac{۲۷/۵ \times ۰/۰۷۵}{۲/۸۳ \times ۱۰^{-۴}} = ۷۲۸۸ \, kN/m^۲$$

۶-۲۶. مطلوب است تعیین حداکثر تنش خمشی در مقطعی به فاصلهٔ ۲۵۰ میلیمتر از تکیه‌گاه یک تیر طره‌ای که مطابق شکل بارگذاری شده است. نتایج را در روی یک جزء کوچک در امتداد تیر نشان دهید. وزن تیر تقریباً ۳۵۰ نیوتن بر متر و P مساوی ۴۵۰ نیوتن می‌باشد.

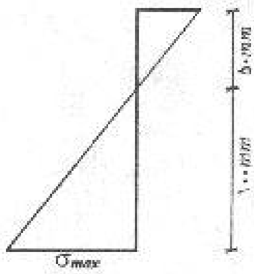


مسأله ۶-۲۶

$$M = -(۴۵۰)(۰/۲۵) - (۳۵۰)(۰/۱۲۵)(۰/۲۵) = -۱۲۳ N.m$$

$$I = \frac{۱}{۳۶}(۰/۶)(۰/۱۵)^۳ = ۵/۶۳ \times ۱۰^{-۶} m^۴$$

$$\sigma_{max} = \frac{۱۲۳(۰/۱)(۱۰^{-۶})}{۵/۶۳ \times ۱۰^{-۶}} = ۲/۱۸ \, MN/m^۲ \, (MPa)$$

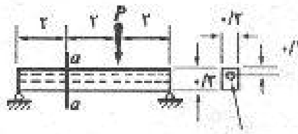


۶-۲۷. در مقطع $a-a$ از تیر نشان داده شده در شکل، مطلوب است تعیین، (الف) حداکثر تنش قائم. (ب) تنش قائم در وسط ارتفاع. وزن تیر ۳ کیلو نیوتن بر متر و P مساوی ۱۰ کیلو نیوتن می‌باشد.

محل محور خنثی را نسبت به محور مرکزی بدست می‌آوریم:

$$\bar{y} = \frac{۰ - \frac{\pi}{۴}(۰/۱۵)^۲(۰/۰۵)}{۰/۲ \times ۰/۳ - \frac{\pi}{۴}(۰/۱۵)^۲} = -۰/۰۲۱ m$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۰/۲)(۰/۳)^۳ + (۰/۲ \times ۰/۳)(۰/۰۲۱)^۲$$



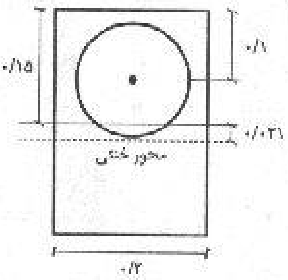
سوراخی به قطر ۰/۱۵ متر

مسأله ۶-۲۷

$$-\frac{\pi}{۴}\left(\frac{۰/۱۵}{۲}\right)^{۴}-\frac{\pi}{۴}(۰/۱۵)^{۲}(۰/۰۷۱)^{۲}=۳/۶۳\times ۱۰^{-۴}m^{۴}$$

$$\sum M_B=۰\quad : \quad R_A\times ۶-P\times ۲-(۳\times ۶)\times ۳=۰$$

$$\Rightarrow R_A=۱۲/۳kN$$



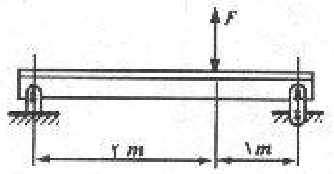
$$M_{aa}=۱۲/۳\times ۲-(۳\times ۲)\times ۱=۱۸/۶\,kN.m$$

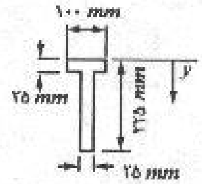
$$\sigma_{max}=\frac{M_{aa}\,c}{I}=\frac{۱۸/۶\times(۰/۱۵+۰/۰۲۱)}{۳/۶۳\times ۱۰^{-۴}}=۸۷۶۲\,kN/m^{۲}$$

$$=۸/۷۶۲\,MPa$$

$$\sigma_m=\frac{۱۸/۶\times ۰/۰۲۱}{۳/۶۳\times ۱۰^{-۴}}=۱۰۷۶\,kN/m^{۲}$$

۶-۲۸. مطابق شکل، یک تیر با مقطع سپری از مصالحی ساخته شده است که حد تناسب کششی آن ۲۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع و حد تناسب فشاری آن مساوی ۴۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد. با ضریب اطمینان ۱/۵ در مقابل جاری شدن، مطلوب است تعیین حداکثر نیروی متمرکز F (جهت F می‌تواند هم به سمت بالا و هم به سمت پایین باشد) که می‌تواند بر تیر وارد شود. مسأله را نقط بر مبنای حداکثر تنشهای خمشی ناشی از F حل نمایید.



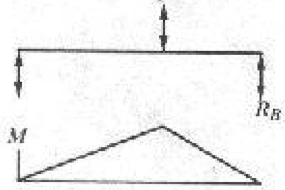


مسأله ۶-۲۸

$$\bar{y}=\frac{(۱۰۰\times ۲۵)(۱۲/۵)+(۲۰۰\times ۲۵)(۱۲۵)}{۱۰۰\times ۲۵+۲۰۰\times ۲۵}=۸۷/۵mm \qquad \text{از بالا}$$

$$I=\frac{۱}{۱۲}(۱۰۰)(۲۵)^{۳}+(۱۰۰\times ۲۵)(۷۵)^{۲}+\frac{۱}{۱۲}(۲۵)(۲۰۰)^{۳}+(۲۵\times ۲۰۰)(۳۷/۵)^{۲}$$

$$=۳۷/۹\times ۱۰^{۶}mm^{۴}$$



$$R_B=\frac{۲}{۳}F \qquad M_{max}=\frac{۲}{۳}F\times ۱=\frac{۲}{۳}F\,kN.m$$

مسأله را برای دو حالت حل می‌کنیم:

۱- وقتی جهت F رو به بالاست:

$$\sigma_t=\frac{Mc}{I}=\frac{\left(\frac{۲}{۳}F\times ۱۰^{۳}\right)(۸۷/۵)}{۳۷/۹\times ۱۰^{۶}}=\frac{۲۰}{۱/۵} \quad\Rightarrow\quad F=۸/۶۶\,kN$$

$$\sigma_c = \frac{\left(\frac{۲}{۳}F\times ۱۰^{۳}\right)(۱۳۷/۵)}{۳۷/۹\times ۱۰^{۶}} = \frac{۴۰}{۱/۵} \Rightarrow F = ۱۱\,kN$$

پس حداکثر نیروی وارده در این حالت $۸/۶۶\,kN$ است.

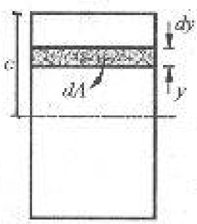
۲- وقتی جهت F رو به پایین است:

$$\sigma_t = \frac{\left(\frac{۲}{۳}F\times ۱۰^{۳}\right)(۸۷/۵)}{۳۷/۹\times ۱۰^{۶}} = \frac{۴۰}{۱/۵} \Rightarrow F = ۱۷/۳\,kN$$

$$\sigma_c = \frac{\left(\frac{۲}{۳}F\times ۱۰^{۳}\right)(۱۳۷/۵)}{۳۷/۹\times ۱۰^{۶}} = \frac{۲۰}{۱/۵} \Rightarrow F = ۵/۵۱\,kN$$

نتیجتاً در این حالت حداکثر نیروی وارده $۵/۵۱\,kN$ می‌باشد.

۶-۲۹. اگر به عوض قانون هوک، رابطهٔ تنش-کرنش به صورت $\sigma^n = E\varepsilon$ بیان شود، نشان دهید که حداکثر تنش خمشی در یک تیر با مقطع مربع مستطیل مساوی: $\sigma_{max} = \left(\frac{MC}{I}\right)\left[\frac{(۲n+۱)}{(۳n)}\right]$ می‌باشد.



$$dM = \sigma\, dA . y = (E\varepsilon)^{\frac{1}{n}}\, ybdy \qquad M = ۲\int_{۰}^{c} (E\varepsilon)^{\frac{1}{n}}\, ybdy$$

$$\varepsilon = \frac{y}{c}\varepsilon_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E}\cdot\frac{y}{c}$$

$$M = ۲\int_{۰}^{c}\left[\frac{E\,\sigma_{max}}{Ec}\,y\right]^{\frac{1}{n}} ybdy = ۲c^{-\frac{1}{n}}\,\sigma_{max}\, b\left(\frac{y^{۲+\frac{1}{n}}}{۲+\frac{1}{n}}\right)\Bigg|_{۰}^{c}$$

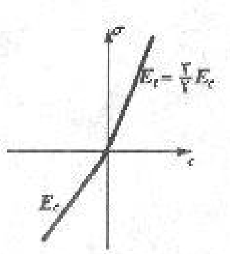
$$= ۲c^{-\frac{1}{n}}\sigma_m\, b\left(\frac{n}{۲n+۱}\right)\left(c^{۲+\frac{1}{n}}\right) \Rightarrow M = \sigma_m\, b\,۲c^{۲}\,\frac{n}{۲n+۱} \quad\Rightarrow \sigma_m = \frac{۲n+۱}{n}\,\frac{M}{۲bc^{۲}} \quad (۱)$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}\,b\,(۲c)^{۳} \Rightarrow ۲bc^{۲} = \frac{۳I}{c} \qquad (۲)$$

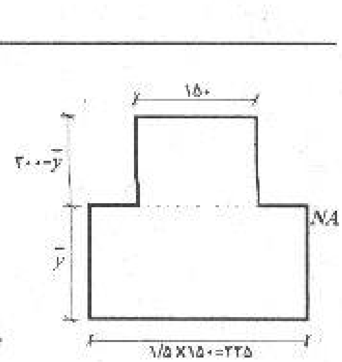
از مقایسه روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\sigma_m = \frac{۲n+۱}{۳n}\cdot\frac{Mc}{I}$$

۶-۳۰. یک مقطع مربع مستطیل به ابعاد ۳۰۰ × ۱۵۰ میلی‌متر، تحت تأثیر لنگر خمشی ۲۴۰ کیلونیوتن‌متر در حول محور قوی‌اش می‌باشد. مصالح تیر غیر ایزوتروپیک می‌باشد، به نحوی که ضریب ارتجاعی در کشش، ۱/۵ برابر ضریب ارتجاعی در فشار است (به شکل مراجعه کنید) اگر تنشها از حد تناسب خارج نشوند، مطلوب است تعیین حداکثر تنشهای کششی و فشاری در تیر.



مسئله ۶-۳۰



$$n = \frac{E_t}{E_c} = ۱/۵$$

$$\sum M_{NA} = ۰ \; : \; ۲۲۵\, \bar{y} \left(\frac{\bar{y}}{۲}\right) = ۱۵۰(۳۰۰ - \bar{y})\left(\frac{۳۰۰ - \bar{y}}{۲}\right)$$

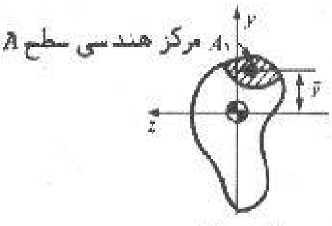
$$\rightarrow \; \bar{y} = ۱۳۵mm \;, \quad ۳۰۰ - \bar{y} = ۱۶۵mm$$

$$I = \frac{۱}{۳}(۱۵۰)(۱۶۵)^۳ + \frac{۱}{۳}(۲۲۵)(۱۳۵)^۳ = ۴/۰۹ \times ۱۰^۸ mm^۴$$

$$\sigma_c = \frac{(۲۴۰ \times ۱۰^۶ (N.mm))(۱۶۵)}{۴/۰۹ \times ۱۰^۸} = ۹۶/۸\, MPa$$

$$\sigma_t = \frac{۱/۵(۲۴۰ \times ۱۰^۶)(۱۳۵)}{۴/۰۹ \times ۱۰^۸} = ۱۱۸/۸\, MPa$$

۶-۳۱. یک تیر ارتجاعی را در نظر بگیرید که تحت تأثیر لنگر خمشی M در حول یکی از محورهای اصلی‌اش که لنگر ماند مقطع نسبت به آن مساوی I می‌باشد، قرار دارد. نشان دهید که برای چنین تیری نیروی قائم F که در روی هر سطح دلخواه A_1 اثر می‌کند، برابر است با:



مسأله ۶-۳۱

$$F = \frac{MQ}{I}$$

که در آن: $Q = \int_{A_1} y dA = \bar{y}A_1$ می‌باشد.

مطابق شکل $\bar{y}$ فاصلهٔ مرکز هندسی سطح A_1 تا مرکز هندسی سطح مقطع کل می‌باشد.

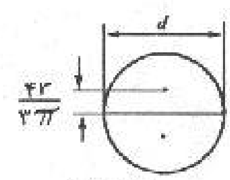
$$F = \int_{A_1} \sigma\, dA = \int_{A_1} \frac{My}{I}\, dA = \frac{M}{I}\int_{A} y dA = \frac{MQ}{I}$$

۶-۳۲ تا ۶-۳۶. مطلوب است تعیین نسبت M_{ult}/M_{yp} برای نیمرخهای نشان داده شده در شکل که در حول محور مرکزی افقی‌شان تحت تأثیر لنگر خمشی قرار دارند. از ترسیمهٔ تنش - کرنش ایده‌آل مثال ۶-۶ استفاده نمائید.

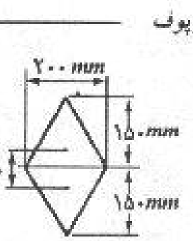
$$M_y = \frac{\sigma_y I}{c} = \frac{\sigma_y \frac{\pi r^۴}{۴}}{r} = \frac{\pi r^۳}{۴}\sigma_y$$

$$M_u = \underbrace{\sigma_y \left(\frac{۱}{۲}\pi r^۲\right)}_{F}\left(۲ \times \frac{۴r}{۳\pi}\right) = \frac{۴r^۳}{۳\pi}\sigma_y$$

$$M_u / M_y = \frac{۱۶}{۳\pi} = ۱/۷$$

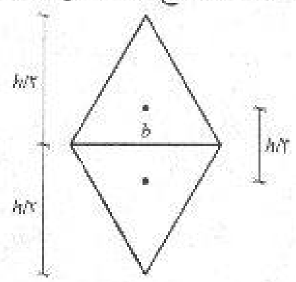


مسأله ۶-۳۲



مسأله ۶-۳۳

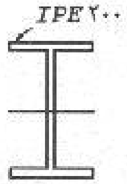
مسأله را در حالت کلی حل می‌کنیم:
با در نظر گرفتن این نکته که ممان اینرسی مثلث نسبت به قاعده برابر است با $I = \frac{۱}{۱۲}bh^۳$ که در آن b قاعده و h ارتفاع مثلث می‌باشند داریم:



$$M_y = \frac{\sigma I}{c} = \frac{\sigma_y \times ۲ \times \frac{۱}{۱۲} b \left(\frac{h}{۲}\right)^۳}{\frac{h}{۲}} = \frac{bh^۲}{۲۴}\sigma_y$$

$$M_u = T \times d = (\sigma_y A) \, . \, d = \left[\sigma_y \frac{۱}{۲}(b)\left(\frac{h}{۲}\right)\right] \times \frac{h}{۳} = \frac{bh^۲}{۱۲}\sigma_y$$

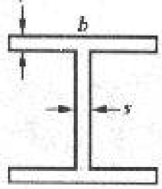
$$M_u / M_y = ۲$$



$$\sigma_y = \frac{M_y c}{I} \quad \Rightarrow M_y = \sigma_y S$$

مسأله ۶-۳۴

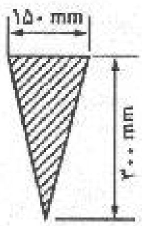
از جدول ۴ ضمیمه: $S = ۱۹۴\, cm^۳ = ۱۹۴ \times ۱۰^۳\, mm^۳$



$$M_u = \sigma_y(۱۰۰ \times ۸/۵) \times ۱۹۱/۵ + \sigma_y(۹۱/۵ \times ۵/۶) \times ۹۱/۵ = ۲۰۹۶۵۹/۶\,\sigma_y$$

$$\frac{M_u}{M_y} = ۱/۱$$

$b = ۱۰۰mm$
$s = ۵/۶mm$
$t = ۸/۵mm$



مسأله ۶-۳۵

$$M_y = \frac{\sigma_y}{c} I = \frac{\sigma_y}{۰/۲} \times \frac{۱}{۳۶}(۰/۱۵)(۰/۳)^۳ = ۵/۶۳ \times ۱۰^{-۴}\sigma_y$$

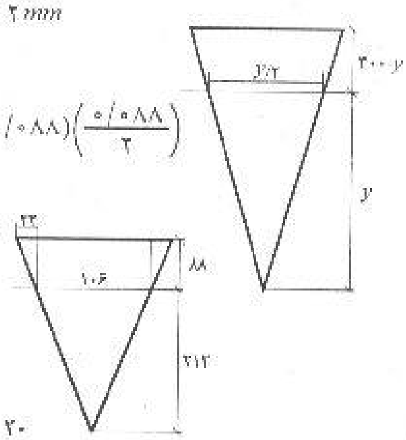
$$C = T \Rightarrow \sigma_t A_۱ = \sigma_c A_۲$$

در M_u تنش ثابت و در تمام مقطع اندازه یکسانی دارد. در نتیجه:

$$A_1 = A_2$$

یعنی مساحت بالای محور خنثی و زیر آن باید مساوی باشند:

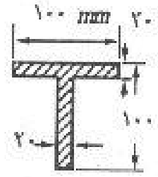
$$\frac{1}{2}y\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2} + 150\right)(300 - y) \quad \to y = 212\,mm$$



$$M_u = \sigma_y\left[\frac{1}{2}(0.212)(0.106)\left(\frac{0.212}{3}\right) + (0.106)(0.088)\left(\frac{0.088}{2}\right)\right.$$

$$\left. + (0.022)(0.088)\left(\frac{0.088}{2}\right)\right] = 1.29\times10^{-3}\,\sigma_y$$

$$\frac{M_u}{M_y} = \frac{1.29\times10^{-3}\sigma_y}{5.63\times10^{-4}\sigma_y} = 2.29$$



مسئله ۶-۳۶

$$\bar{y} = \frac{(100\times20)(10) + (80\times20)(60)}{100\times20 + 80\times20} = 32.2\,mm \text{ از بالا}$$

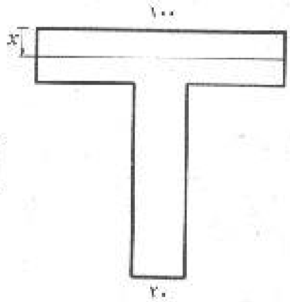
$$I = \frac{1}{12}(100)(20)^3 + (100\times20)(32.2 - 10)^2$$

$$+ \frac{1}{12}(20)(80)^3 + (20\times80)(60 - 32.2)^2 \quad \Rightarrow I = 3.14\times10^6\,mm^4$$

$$M_y = \frac{\sigma_y I}{c} = \frac{\sigma_y\times3.14\times10^6}{(100 - 32.2)} = 4.63\times10^4\sigma_y$$

در حالتی‌که $M = M_u$ سطوح بالا و پایین محور خنثی باید برابر باشند زیرا:

$$C = T \to \sigma A_1 = \sigma A_2 \to A_1 = A_2$$



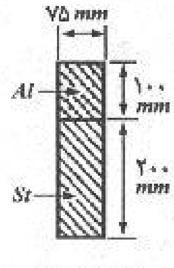
$$100x = 100(20 - x) + 20\times80 \Rightarrow x = 18\,mm$$

$$M_u = \sigma_y\left[(100\times18)\left(\frac{18}{2}\right) + (100\times2)(1) + (20\times80)(42)\right]$$

$$M_u = 83600\,(mm^3)\,\sigma_y = 8.35\times10^{-5}\sigma_y$$

$$M_u/M_y = \frac{8.36\times10^4\sigma_y}{4.63\times10^4\sigma_y} = 1.8$$

۶-۳۷ تا ۶-۳۹. هر کدام از مقاطع مرکب نشان داده شده در شکل تحت تأثیر لنگر خمشی ۸۰ کیلونیوتن‌متر قرار دارند. مصالح به طور محکم به یکدیگر وصل شده‌اند، به طوری که تیر به‌صورت یکپارچه عمل می‌کند. مطلوب است تعیین تنش حداکثر در هر کدام از مصالح.



مسئله ۶-۳۷

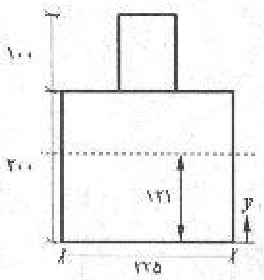
$$E_{st} = ۲/۱ \times ۱۰^{۵} N/mm^{۲} \qquad E_{AL} = ۰/۷ \times ۱۰^{۵} N/mm^{۲}$$

$$n = \frac{E_{st}}{E_{Al}} = \frac{۲/۱}{۰/۷} = ۳ \qquad w_{Al} = ۳ \times ۷۵ = ۲۲۵\, mm$$

$$\bar{y} = \frac{(۲۲۵ \times ۲۰۰)(۱۰۰) + (۱۰۰ \times ۷۵)(۲۵۰)}{۲۲۵ \times ۲۰۰ + ۱۰۰ \times ۷۵} = ۱۲۱\, mm$$

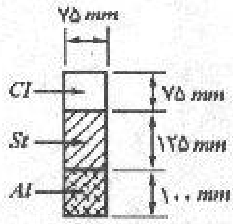
$$I = \frac{۱}{۱۲}(۲۲۵)(۲۰۰)^{۳} + (۲۲۵ \times ۲۰۰)(۲۱)^{۲} +$$

$$\frac{۱}{۱۲}(۷۵)(۱۰۰)^{۳} + (۷۵ \times ۱۰۰)(۲۵۰ - ۱۲۱)^{۲} \Rightarrow I = ۳۰۱ \times ۱۰^{۶}\, mm^{۴}$$



$$\sigma_{Al} = \frac{Mc}{I} = \frac{(۸۰ \times ۱۰^{۶})(۳۰۰ - ۱۲۱)}{۳۰۱ \times ۱۰^{۶}} = ۴۷/۶\, MPa$$

$$\sigma_{st} = n\frac{Mc}{I} = ۳ \times \frac{(۸۰ \times ۱۰^{۶})(۱۲۱)}{۳۰۱ \times ۱۰^{۶}} = ۹۶/۵\, MPa$$



مسئله ۶-۳۸

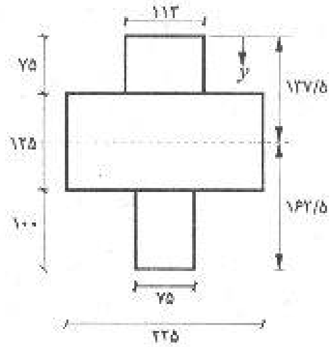
$$\frac{E_{CI}}{E_{Al}} = ۱/۵ \qquad \frac{E_{st}}{E_{Al}} = ۳$$

$$\bar{y} = \frac{(۱۱۳ \times ۷۵)\left(\frac{۷۵}{۲}\right) + (۱۲۵ \times ۲۲۵)\left(۷۵ + \frac{۱۲۵}{۲}\right) + (۱۰۰ \times ۷۵)(۲۵۰)}{(۱۱۳ \times ۷۵) + (۱۲۵ \times ۲۲۵) + (۱۰۰ \times ۷۵)} = ۱۳۷/۵\, mm$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۱۱۳)(۷۵)^{۳} + (۱۱۳ \times ۷۵)\left(۱۳۷/۵ - \frac{۷۵}{۲}\right)^{۲} + \frac{۱}{۱۲}(۲۲۵)(۱۲۵)^{۳}$$

$$+ \frac{۱}{۱۲}(۷۵)(۱۰۰)^{۳} + (۷۵ \times ۱۰۰)(۱۱۲/۵) = ۲۲۷ \times ۱۰^{۶}\, mm^{۴}$$

$$\sigma_{Cl} = ۱/۵\,\frac{(۸۰ \times ۱۰^{۶})(۱۳۷/۵)}{۲۲۷ \times ۱۰^{۶}} = ۷۲/۶۸\,MPa$$

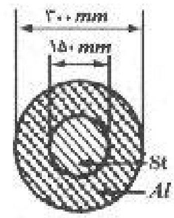


$$\sigma_{st} = ۳\,\frac{(۸۰ \times ۱۰^{۶})(۶۲/۵)}{۲۲۷ \times ۱۰^{۶}} = ۶۶/۱\,MPa$$

$$\sigma_{Al} = \frac{(۸۰ \times ۱۰^{۶})\,(۱۶۲/۵)}{۲۴۷ \times ۱۰^{۶}} = ۵۷/۳\,MPa$$

(راهنمایی برای مسأله ۶-۳۹: لنگر ماند یک بیضی به قطر بزرگ $۲a$ و قطر کوچک $۲b$، در حول قطر بزرگتر مساوی $\frac{۱}{۴}\pi ab^{۳}$ می‌باشد.)

$$n = \frac{E_{st}}{E_{Al}} = ۳$$

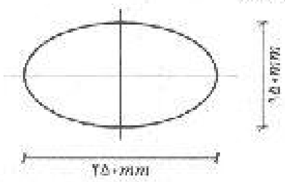


مسأله ۶-۳۹

$$I = \frac{۱}{۴}\pi(۲۲۵)(۷۵)^{۳} + \frac{\pi}{۴}(۱۵۰^{۴} - ۷۵^{۴})$$

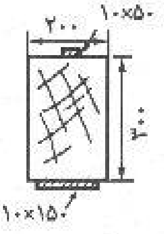
$$I = ۴۴۷ \times ۱۰^{۶}\,mm^{۴}$$

$$\sigma_{Al} = \frac{Mc}{I} = \frac{(۸۰ \times ۱۰^{۶})(۱۵۰)}{۴۴۷ \times ۱۰^{۶}} = ۲۶/۸\,MPa$$



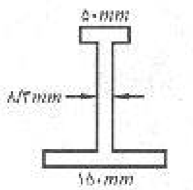
$$\sigma_{st} = n\frac{Mc}{I} = \frac{(۸۰ \times ۱۰^{۶})(۷۵)}{۴۴۷ \times ۱۰^{۶}} = ۴۰/۳\,MPa$$

۶-۴۰ و ۶-۴۱. مطلوب است تعیین لنگر خمشی مجاز در حول محور خنثای افقی مقاطع مرکب چوب و فولاد نشان داده شده در شکل. مصالح به طور محکم به یکدیگر وصل شده‌اند، به طوری که تیر به‌صورت یکپارچه عمل می‌کند. ضریب ارتجاعی فولاد مساوی ۲×۱۰^{۵} و ضریب ارتجاعی چوب مساوی $۰/۰۸۳ \times ۱۰^{۵}$ نیوتن بر میلی‌مترمربع و تنش مجاز فولاد و چوب به ترتیب ۱۴۰ و ۸/۳ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.



مسأله ۶-۴۰

$$n = \frac{E_{st}}{E_{w}} = \frac{۲ \times ۱۰^{۵}}{۰/۰۸۳ \times ۱۰^{۵}} = ۲۴/۱$$



$$b = \frac{۲۰۰}{۲۴/۱} = ۸/۳$$

$$\bar{y} = \frac{(۱۵۰ \times ۱۰)(۵) + (۳۰۰ \times ۸/۳)(۱۶۰) + (۵۰ \times ۱۰)(۳۱۵)}{۱۵۰ \times ۱۰ + ۳۰۰ \times ۸/۳ + ۵۰ \times ۱۰} = ۱۲۵/۵\,mm$$ از پایین

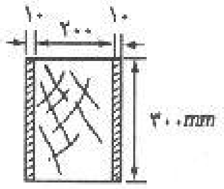
$$I = \frac{1}{12}(150)(10)^3 + (150 \times 10)(125.5 - 5)^2$$

$$+ \frac{1}{12}(8.3)(300)^3 + (8.3 \times 300)(160 - 125.5)^2$$

$$+ \frac{1}{12}(50)(10)^3 + (50 \times 10)(315 - 125.5)^2 = 61.4 \times 10^6\, mm^4$$

$$M_{st} = \frac{\sigma_{st} I}{c} = \frac{140 \times 61.4 \times 10^6}{(320 - 125.5)} = 46.6 \times 10^6\, N.mm = 44.2\, kN.m$$

$$\sigma_w = \frac{1}{n}\frac{M.c}{I} \Rightarrow M_w = \frac{24.1 \times 8.3 \times 61.4 \times 10^6}{(310 - 125.5)} = 66.6 \times 10^6\, N.mm = 66.6\, kN.m$$

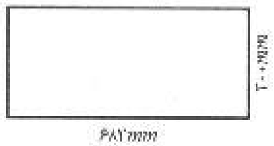


مسأله ۶-۴۱

$$n = \frac{E_{st}}{E_w} = 24.1$$

$$10 \times 24.1 = 241$$

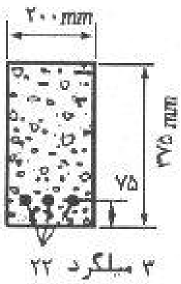
$$b = 200 + 2 \times 241 = 682\, mm$$



$$I = \frac{1}{12}(0.682)(0.3)^3 = 1.54 \times 10^{-3}\, m^4$$

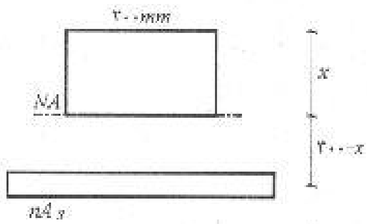
$$M_w = \frac{\sigma I}{c} = \frac{8.3 \times 10^6 \times 1.54 \times 10^{-3}}{0.15} = 85.2\, kN.m$$

$$M_{st} = \frac{\sigma I}{n\, c} = \frac{140 \times 10^6 \times 1.54 \times 10^{-3}}{24.1 \times 0.15} = 59.6\, kN.m$$



مسأله ۶-۴۲

۶-۴۲. یک تیر بتن مسلح با مقطع نشان داده شده در شکل، تحت تأثیر لنگر خمشی مثبت ۱۱ کیلونیوتن‌متر قرار دارد. مطلوب است تعیین حداکثر تنش فشاری در بتن و حداکثر تنش کششی در فولاد. n را مساوی ۱۵ فرض کنید.



$$A_s = 3\frac{\pi}{4}(22)^2 = 1140.4\, mm^2$$

$$nA_s = 15 \times 1140.4 = 17106\, mm^2$$

$$\sum M_{NA} = ۰ : \quad ۲۰۰ \times x \cdot \frac{x}{۲} = nA_s(۳۰۰ - x)$$

از حل معادله فوق مقدار x بدست می‌آید:

$$x = ۱۵۶/۶$$

$$۳۰۰ - x = ۱۴۳/۴$$

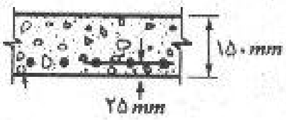
$$I = \frac{۱}{۱۲}(۲۰۰)(۱۵۶/۶)^۳ + (۲۰۰ \times ۱۵۶/۶)\left(\frac{۱۵۶/۶}{۲}\right)^۲ + ۱۷۱۰۶(۱۴۳/۴)^۲$$

$$= ۶۰۷/۸ \times ۱۰^۶\, mm^۴$$

$$\sigma_c = \frac{Mc}{I} = \frac{۱۱ \times ۱۰^۶ \times ۱۵۶/۶}{۶۰۷/۸ \times ۱۰^۶} = ۲/۸۳\, MPa$$

$$\sigma_{st} = n\frac{Mc}{I} = ۱۵\, \frac{۱۱ \times ۱۰^۶ \times ۱۴۳/۴}{۶۰۷/۸ \times ۱۰^۶} = ۳۸/۹\, MPa$$

۶-۴۳. مقطع یک دال بتن مسلح به ضخامت ۱۵۰ میلی‌متر مطابق شکل می‌باشد. مطلوب است تعیین لنگر خمشی مجاز برای یک متر پهنای دال. n را مساوی ۱۲ و تنش کششی مجاز فولاد و تنش فشاری مجاز بتن را به‌ترتیب مساوی ۱۵۰ و ۸ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.



مسأله ۶-۴۳

تعداد میلگرد در یک متر: $N = \frac{۱}{۸۰} \times ۱۰۰۰ = ۱۲/۵$

$$A_s = ۱۲/۵ \times \frac{\pi}{۴}(۱۰)^۲ = ۹۸۱/۷۵\, mm^۲$$

$$nA_s = ۱۱۷۸۱\, mm^۲$$

$$۱۰۰۰ \times x \cdot \frac{x}{۲} = ۱۱۷۸۱ \times (۱۲۵ - x) \rightarrow x = ۴۳/۷۵mm \qquad ۱۲۵ - x = ۸۱/۳$$

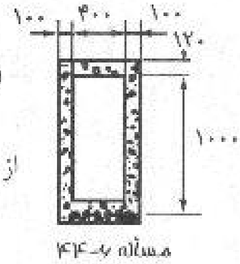
$$I = \frac{۱}{۳} \times ۱۰۰۰ \times (۴۳/۷)^۳ + ۱۱۷۸۱(۱۲۵ - ۴۳/۷)^۲ = ۱۰۵/۶۸ \times ۱۰^۶\, mm^۴$$

$$\sigma_c = \frac{Mc}{I} \quad \Rightarrow M = \frac{\sigma_c I}{c} = \frac{۸ \times ۱۰۵/۶۸ \times ۱۰^۶}{۴۳/۷} = ۱۹/۳۴ \times ۱۰^۶\, N.mm = ۱۹/۳۴\, kN.m$$

$$\sigma_s = n\frac{Mc}{I} \Rightarrow M = \frac{\sigma_s I}{nc} = \frac{۱۵۰ \times ۱۰۵/۶۸ \times ۱۰^۶}{۱۲ \times ۸۱/۳} = ۱۶/۲\, kN.m$$

۶-۴۴. مقطع یک تیر بتن مسلح همانند شکل به‌صورت جعبه‌ای می‌باشد. سطح مقطع مجموع میلگردهای کششی مساوی ۳۶۰۰ میلی‌مترمربع و $n = ۱۰$ می‌باشد. اگر حداکثر تنش فشاری ناشی از خمش در بتن مساوی ۷ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، تنش موجود در میلگردهای کششی و لنگر خمشی وارد بر مقطع چقدر می‌باشد.

$$A_s = ۳۶۰۰mm^۲ \qquad nA_s = ۳۶۰۰۰mm^۲$$



مسئله ۶-۴۴
(ابعاد برحسب میلی‌متر)

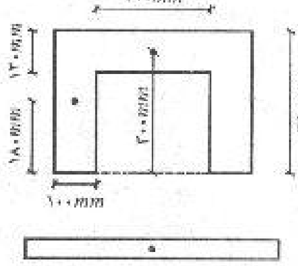
$$(400 \times 120)(x - 60) + 2 \times (100 \times x)\frac{x}{2} = 36000 \times (1120 - x)$$

از حل معادله فوق خواهیم داشت: $x = 360\, mm\,,\ 1120 - x = 760$

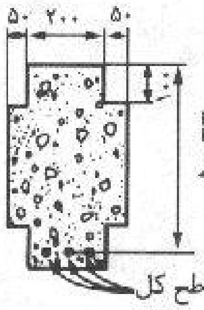
$$\sigma_{st} = 10\left(\frac{760}{360}\right) \times 7 = 147.8\, N/mm^2$$

$$I = \frac{1}{12}(400)(120)^3 + (400 \times 120)(300)^2 + 2\left[\frac{1}{12}(100)(360)^3\right]$$

$$+ 2(100 \times 360)(180)^2 + 36000(1120 - 360)^2 = 2.83 \times 10^{10}$$

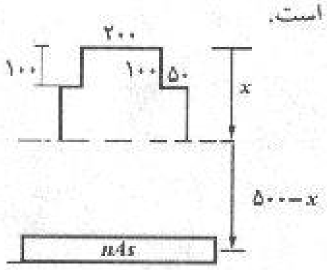


$$M = \frac{\sigma I}{c} = \frac{7 \times 2.83 \times 10^{10}}{360} = 549.92\, kN.m$$



مسئله ۶-۴۵

۶-۴۵. تنش موجود در میلگردهای کششی یک تیر بتن مسلح با مقطع نشان داده شده، در اثر لنگر خمشی مثبت، مساوی ۱۴۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد. اگر $n = 12$ باشد، مقدار لنگر خمشی چقدر است.



$$nA_s = 12 \times 1500 = 18000\, mm^2$$

$$\left[300(x - 100)\right]\frac{(x - 100)}{2} + (200 \times 100)(x - 50) = 18000(500 - x)$$

پس از حل معادله فوق: $x = 212.87\, mm$

$$I = \frac{1}{12}(300)(112.87)^3 + (300 \times 112.87)\left(\frac{112.87}{2}\right) + \frac{1}{12}(200)(100)^3$$

$$+ (200 \times 100)(162.87)^2 + (18000)(287.13)^2 \ \Rightarrow\ I = 21.75 \times 10^8\, mm^4$$

$$\sigma = n\frac{Mc}{I} \quad \Rightarrow M = \frac{\sigma I}{nc} = \frac{140 \times 21.75 \times 10^8}{12 \times 287.13} = 88.4 \times 10^6\, N.mm = 88.4\, kN.m$$

۶-۴۶. مثال ۶-۱۲ را با تغییر h به ۱۰۰ میلی‌متر، مجدداً حل نمایید.

الف)

$$S = \frac{bh^۲}{۶} = \frac{(۰/۰۵)(۰/۱)^۲}{۶} = ۸/۳۳ \times ۱۰^{-۵} m^۳$$

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{۲۰۸۳ \times ۱۰^{-۶}}{۸/۳۳ \times ۱۰^{-۵}} = ۲۵ MPa$$

ب)

$$\bar{r} = ۰/۲۵m \quad , \quad r_o = ۰/۲۵ + ۰/۰۵ = ۰/۳m \quad , \quad r_i = ۰/۲m$$

$$R = \frac{h}{ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} = \frac{۱}{ln\left(\frac{۰/۳}{۰/۲}\right)} = ۰/۲۴۶۶۳m$$

$$\sigma_i = \frac{M(R - r_o)}{r_o A(\bar{r} - R)} = \frac{۲۰۸۳ \times ۱۰^{-۶}(۰/۲۴۶۶۳ - ۰/۲)}{(۰/۲)(۰/۰۰۵)(۰/۲۵ - ۰/۲۴۶۶۳)} = ۲۸/۸ MPa$$

$$\sigma_o = \frac{M(R - r_o)}{r_o A(\bar{r} - R)} = \frac{۲۰۸۳ \times ۱۰^{-۶}(۰/۲۴۶۶۳ - ۰/۳)}{(۰/۳)(۰/۰۵)(۰/۲۵ - ۰/۲۴۶۶۳)} = -۲۲ MPa$$

پ)

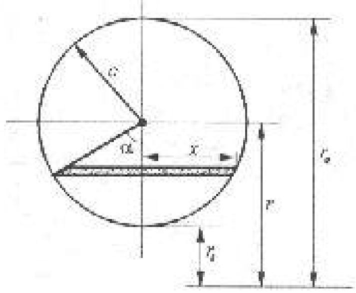
$$\bar{r} = ۰/۰۷۵m \qquad r_o = ۰/۱۲۵m \qquad r_i = ۰/۰۲۵m$$

$$R = \frac{۰/۱}{ln\left(\frac{۰/۱۲۵}{۰/۰۲۵}\right)} = ۰/۰۶۲۱۳m$$

$$\sigma_i = \frac{۲۰۸۳ \times ۱۰^{-۶} \times (۰/۰۶۲۱۳ - ۰/۰۲۵)}{(۰/۰۲۵)(۰/۰۰۵)(۰/۰۱۲۸۷)} = ۴۸/۱ MPa$$

$$\sigma_o = \frac{۲۰۸۳ \times ۱۰^{-۶} \times (۰/۰۶۲۱۳ - ۰/۱۲۵)}{(۰/۱۲۵)(۰/۰۰۵)(۰/۰۱۲۸۷)} = -۱۶/۲۸ MPa$$

۶-۴۷. معادلهٔ ۶-۲۳ را به‌دست آورید.



$$R = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}} \qquad A = \pi c^۲$$

$$\int_A \frac{dA}{r} = \int \frac{۲ \times dr}{r} = \int_۰^{\pi} \frac{۲c \, Sin\alpha}{\bar{r} + c \, Cos\alpha} c \, Sin\alpha \, d\alpha$$

$$= \int_{\circ}^{\pi} \frac{۲c^۲(۱ - Cos^۲\alpha)}{\bar{r} + c\ Cos\,\alpha}\, d\alpha = ۲\int_{\circ}^{\pi} \frac{c^۲ - c^۲Cos^۲\alpha + \bar{r}^۲ - \bar{r}^۲}{\bar{r} + c\ Cos\,\alpha}\, d\alpha$$

$$= ۲ \int_{\circ}^{\pi} \left(\frac{c^۲ - \bar{r}^۲}{\bar{r} + c\ Cos\,\alpha} + \bar{r} - c\ Cos\,\alpha\right) d\alpha = ۲\pi\ (\ \bar{r} - \sqrt{\bar{r}^۲ - c^۲})$$

$$R = \frac{\pi\ c^۲}{۲\pi\ (\ \bar{r} - \sqrt{\bar{r}^۲ - c^۲}\ )} = \frac{\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^۲ - c^۲}}{۲}$$

۶-۴۸. مطلوب است تعیین بزرگترین لنگر خمشی که می‌تواند بر یک تیر منحنی، نظیر چیزی که در شکل ۶-۲۵ -الف نشان داده شده است، با $\bar{r} = ۱۰۰$ میلی‌متر وارد گردد. سطح مقطع تیر، دایره شکل با قطر ۶۰ میلی‌متر و تنش مجاز مساوی ۷۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.

$$R = \frac{\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^۲ - c^۲}}{۲} = \frac{۱۰۰ + \sqrt{۱۰۰^۲ - ۳۰^۲}}{۲} = ۹۷/۷\,mm$$

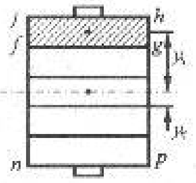
$$\sigma = \frac{M\,(R - r)}{rA\,(\bar{r} - R)} \Rightarrow M = \frac{\sigma\, rA\,(\bar{r} - R)}{R - r}$$

$$M_{\circ} = \frac{۷۰ \times ۱۳۰ \times \pi(۳۰)^۲ \times (۱۰۰ - ۹۷/۷)}{۹۷/۷ - ۱۳۰} = -\ ۱۸۳۲\,N.m$$

$$M_{i} = \frac{۷۰ \times ۷۰ \times \pi(۳۰)^۲\ (۱۰۰ - ۹۷/۷)}{۹۷/۷ - ۷۰} = ۱۱۵۰\,N.m$$

مسائل فصل هفتم

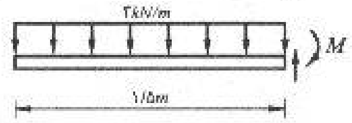
۱-۷. تیری از بهم بستن ۵ الوار، هر کدام به مقطع ۱۵۰ × ۵۰ میلیمتر، ساخته شده است. مقطع این تیر همانند شکل ۷-۴-الف می‌باشد. نشان دهید که: $A_{fghj}\bar{y}_۱ = A_{fgpn}\bar{y}_۲$ می‌باشد که در آن $\bar{y}_۱$ فاصلهٔ مرکز هندسی سطح مقطع کل تا مرکز هندسی A_{fghj} و $\bar{y}_۲$ همان فاصله برای سطح A_{fgpn} می‌باشد.



$$A_{fghj}\,\bar{y}_۱ = \left(\frac{hb}{۵}\right)\left(\frac{۲}{۵}h\right) = \frac{۲h^۲b}{۲۵}$$

$$A_{fgpn}\,\bar{y}_۲ = \frac{۴hb}{۵}\left(\frac{۱}{۱۰}h\right) = \frac{۲h^۲b}{۲۵}$$

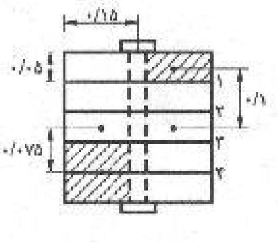
۲-۷. یک تیر طره‌ای به دهانهٔ ۳ متر از بهم بستن ۵ الوار، هر کدام به مقطع ۱۵۰ × ۵۰ میلیمتر، ساخته شده است. مقطع این تیر همانند شکل ۷-۴-الف می‌باشد. الوارها توسط پیچهای قائم ۲۰ میلیمتر در فواصل ۱۲۰ میلیمتری، به یکدیگر بسته شده‌اند. این تیر بار گستردهٔ یکنواختی به میزان ۳ کیلو نیوتن بر متر که شامل وزن تیر نیز است، حمل می‌کند. مطلوب است تعیین تنش برشی پیچی که در فاصلهٔ ۱/۵ متری از تکیه‌گاه قرار دارد. این کار را در هر ۴ صفحهٔ تماس الوارها انجام دهید.



$$V = ۳ \times ۱/۵ = ۴/۵\,kN$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۰/۱۵)(۰/۲۵)^۳ = ۱/۹۵ \times ۱۰^{-۴}\,m^۴$$

$$q = \frac{VQ}{I} \qquad Q_۱ = Q_۴ = A_۱\bar{y}_۱ = (۰/۰۵ \times ۰/۱۵)(۰/۱) = ۷/۵ \times ۱۰^{-۴}\,m^۳$$



$$q_۱ = q_۴ = \frac{(۴/۵)(۷/۵ \times ۱۰^{-۴})}{۱/۹۵ \times ۱۰^{-۴}} = ۱۷/۳\,kN/m$$

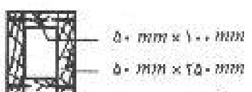
$$\tau = \frac{q_s}{A_b} = \frac{(۱۷/۳)(۰/۱۲)}{\frac{\pi}{۴}(۰/۰۲)^۲} = ۶۶۰۸\,kN/m^۲ = ۶/۶۱\,MPa$$

$$Q_۲ = Q_۳ = A_۲\bar{y}_۲ = (۰/۱ \times ۰/۱۵)(۰/۰۷۵) = ۱۱/۲۵ \times ۱۰^{-۴}$$

$$q_۲ = q_۳ = \frac{(۴/۵)(۱۱/۲۵ \times ۱۰^{-۴})}{۱/۹۵ \times ۱۰^{-۴}} = ۲۶\,kN/m$$

$$\tau = \frac{q_s}{A_b} = \frac{(۲۶)(۰/۱۲)}{\frac{\pi}{۴}(۰/۰۲)^۲} = ۹۹۳۰\,kN/m = ۹/۹۳\,MPa$$

۳-۷. توسط چهار الوار، یک تیر با مقطع جعبه‌ای ساخته شده است (به شکل مراجعه کنید). در مقطع مورد مطالعه، نیروی برشی قائم مساوی ۴۶۴۰ نیوتن و لنگر خمشی مساوی



مسئله ۳-۷

۷۰ نیوتن متر می‌باشد. اگر الوارها توسط میخهایی که نیروی برشی مجاز آنها ۲۵۰ نیوتن است، به یکدیگر وصل شوند، فاصلهٔ آنها چقدر باید باشد.

$$I = \frac{1}{12}(200)(250)^3 - \frac{1}{12}(100)(150)^3 = 232/3 \times 10^6\,mm^4$$

$$Q = A\bar{y} = (50 \times 50)(125 - 25) = 25 \times 10^4\,mm^3$$

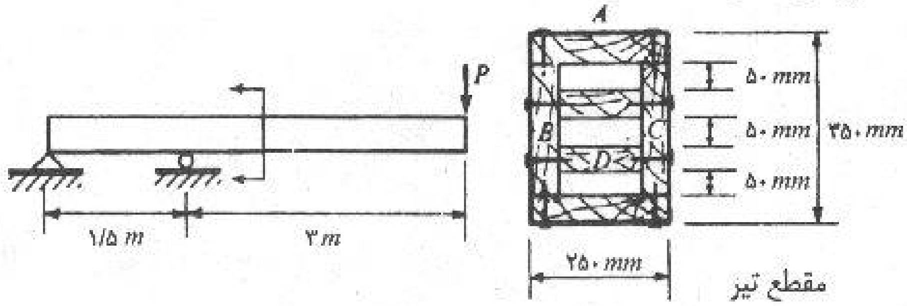
$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{4640 \times 25 \times 10^4}{232/3 \times 10^6} = 5\,N/mm$$

$$F = qs \quad \Rightarrow S = \frac{F}{q} = \frac{250}{5} = 50\,mm$$

۴-۷. مطابق شکل، یک تیر بالکن دار، بار P به میزان ۳۹۴۵ نیوتن را در انتهای آزاد خود حمل می‌کند. تیر از به هم بستن ۶ الوار به ضخامت ۵۰ میلیمتر ساخته شده است. نیروی برشی هر کدام از میخهای مورد مصرف برای این کار، مساوی ۴۰۰ نیوتن می‌باشد. لنگر ماند کل مقطع تقریباً مساوی 740×10^6 میلیمتر به توان ۴ می‌باشد. مطلوب است تعیین،

الف) فواصل میخهای اتصال دهنده الوار A به الوارهای B و C در ناحیهٔ نیروی برشی حداکثر.

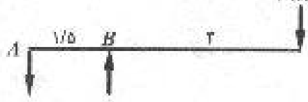
ب) فواصل میخهای اتصال دهندهٔ الوار D به الوارهای B و C در همان ناحیه. در محاسبات از وزن تیر صرف نظر کنید.



مسئله ۷-۴

$$\sum M_A = 0 : 3945 \times 4/5 - R_B \times 1/5 = 0 \rightarrow R_B = 11835\,N$$

$$\sum F_y = 0 : \quad R_A = R_B - 3945 \quad \rightarrow R_A = 7890\,N$$

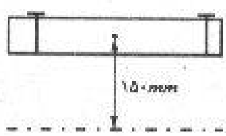


نیروی برشی ماکزیمم در فاصله AB و به میزان $7890\,N$ می‌باشد.

الف)

$$Q = (250 \times 50)(175 - 25) = 18/75 \times 10^5\,mm^3$$

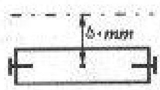
$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{7890 \times 18/75 \times 10^5}{740 \times 10^6} = 20\,N/mm$$



چون از دو پیچ استفاده شده نصف جریان برش بدست آمده بر هر پیچ اعمال می‌شود.

$$S = \frac{F}{\frac{1}{۲}q} = \frac{۴۰۰}{\frac{۲۰}{۲}} = ۴۰\,mm$$

ب)

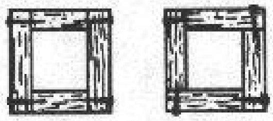


$$Q = (۱۵۰ \times ۵۰)(۵۰) = ۳/۷۵ \times ۱۰^{۵}\,mm^{۳}$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{۷۸۹۰ \times ۳/۷۵ \times ۱۰^{۵}}{۷۴۰ \times ۱۰^{۶}} = ۴\,N/mm$$

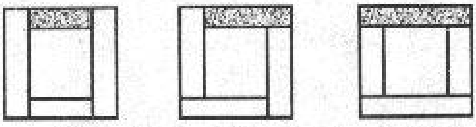
$$S = \frac{F}{\frac{1}{۲}q} = \frac{۴۰۰}{\frac{۱}{۲} \times ۴} = ۲۰۰\,mm$$

۵-۷. از به هم بستن ۴ الوار به ضخامت ۵۰ میلیمتر، می‌خواهیم یک تیر با مقطع جعبه‌ای بسازیم. دو راه ممکن برای این کار در شکل نشان داده شده است. به علاوه طرح (الف) می‌تواند در هنگام استفاده، ۹۰ درجه دوران یابد. (الف)طرحی که برای انتقال نیروی برشی افقی،به کمترین تعداد میخ احتیاج دارد، کدام است. (ب)اگر برشی که قرار است توسط این تیر انتقال یابد، مساوی ۳۰۲۰ نیوتن باشد، برای طرحی که در قسمت الف انتخاب شده، فاصلهٔ میخها چقدر خواهد بود. نیروی برشی مجاز میخ مصرفی را مساوی ۲۴۰ نیوتن در نظر بگیرید.
ابعاد خارجی قوطی ۲۵۰ × ۲۵۰ میلیمتر می‌باشد.



مسأله ۷-۵

با در نظر گرفتن رابطهٔ $\tau = \frac{VQ}{It}$ عنوان مؤثر بر تنش برشی مشخص می‌شوند.
برای مسأله مطرح شده سه طرح مختلف امکان‌پذیر بوده که در زیر ترسیم شده‌اند.



در این طرحها مقادیر I و t یکسان می‌باشد، نیروی برشی هم برای هر سه یکسان فرض شده است. بنابراین مقدار تنش برشی فقط تابع Q می‌باشد. از طرفی $Q = A\bar{y}$ و مقدار $\bar{y}$ مربوط به سطوح تیره در هر سه مورد، مساوی می‌باشد و در نتیجه هر یک از سطوح که مساحت کمتری داشته باشد مطلوب است. با توجه به مطالب ذکر شده، طرح شماره (۱) مناسب‌تر می‌باشد.

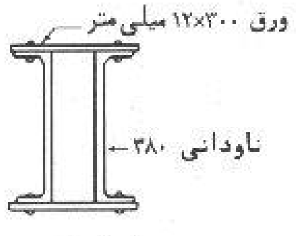
ب)

$$Q = (۱۵۰ \times ۵۰) \times ۱۰۰ = ۷/۵ \times ۱۰^{۵} mm^{۳}$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۲۵۰)(۲۵۰)^{۳} - \frac{۱}{۱۲}(۱۵۰)(۱۵۰)^{۳} = ۲۸۳/۳ \times ۱۰^{۶}\, mm^{۴}$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(۳۰۲۰)(۷/۵ \times ۱۰^{۵})}{۲۸۳/۳ \times ۱۰^{۶}} = ۸\, N/mm$$

$$S = \frac{F}{\frac{۱}{۲}q} = \frac{۲۴۰}{\frac{۱}{۲} \times ۸} = ۶۰\, mm$$



مسأله ۷-۶

۷-۶. مطابق شکل، تیری از دو نیم‌رخ ناودانی و ۲ ورق تقویتی ساخته شده است. اگر در مقطع مورد مطالعه، نیروی برشی قائم مساوی ۶۵۰ کیلو نیوتن و لنگر خمشی مساوی ۵۰ کیلو نیوتن متر باشد، فواصل پرچهای ۲۲ میلیمتری در هر ردیف چقدر خواهد بود. نیروی برشی مجاز پرچ ۲۲ میلیمتری را مساوی ۳۶/۲ کیلو نیوتن در نظر بگیرید.

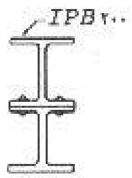
جدول ۸ ضمیمه $\rightarrow$ $UNP\,۳۸۰ : I = ۱۵۷۶۰\, Cm^{۴} = ۱۵۷۶۰ \times ۱۰^{۴} mm^{۴}$

$$I = ۲ \times (۱۵۷۶۰ \times ۱۰^{۴}) + ۲\left(\frac{۱}{۱۲} \times ۳۰۰ \times ۱۲^{۳}\right)$$

$$+ ۲ \times (۱۲ \times ۳۰۰)(۱۹۰ + ۶)^{۲} = ۵۹۱/۸۸ \times ۱۰^{۶} mm^{۴}$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(۶۵۰ \times ۱۰^{۳})\left[(۱۲ \times ۳۰۰)(۱۹۶)\right]}{۵۹۱/۸۸ \times ۱۰^{۶}} = ۷۷۴/۹\, N/mm$$

$$S = \frac{F}{\frac{۱}{۲}q} = \frac{۳۶۲۰۰}{\frac{۱}{۲} \times ۷۷۴/۹} = ۹۳/۴\, mm$$



مسأله ۷-۷

۷-۷. برای اینکه دو نیم‌رخ بال پهن نشان داده شده در شکل به صورت یکپارچه عمل نمایند، آنها را توسط دو ردیف پرچ به یکدیگر می‌بندیم. در مقطع مورد مطالعه، نیروی برشی قائم مساوی ۱۸۰ کیلو نیوتن و لنگر خمشی مساوی ۳۶۰۰ نیوتن متر می‌باشد. با استفاده از پرچهای ۲۲ میلیمتری، که نیروی برشی مجاز هر کدام از آنها مساوی ۳۰ کیلو نیوتن می‌باشد، فاصلهٔ مورد نیاز پرچها، چقدر خواهد بود.

با استفاده از جدول ۶ ضمیمه $IPB\,۲۰۰ \;:\; I = ۵۷۰۰\, Cm^{۴} \;,\; A = ۷۸/۱\, Cm^{۲}$

$$I = ۲ \times ۵۷۰۰ \times ۱۰^{۴} + ۲\,(۷۸۱۰)(۱۰۰)^{۲} = ۲۷۰/۲ \times ۱۰^{۶}\,mm^{۴}$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(۱۸۰۰۰۰)(۷۸۱۰ \times ۱۰۰)}{۲۷۰/۲ \times ۱۰^{۶}} = ۵۲۰/۲۸\,N/mm$$

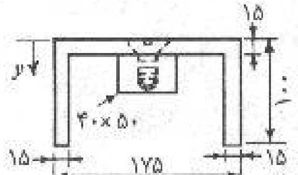
$$S = \frac{۲F}{q} = \frac{۲ \times ۳۰۰۰۰}{۵۲۰/۲۸} = ۱۱۵/۳mm$$

۸-۷. یک چهار سوی ۵۰ × ۴۰ میلیمتر، توسط پیچهای خزینه‌ای به قطر ۱۰ و به فاصلهٔ ۱۵۰ میلیمتر، به نیمرخ ناودانی نشان داده شده در شکل، متصل شده است. اگر این نیمرخ نیروی برشی قائمی به میزان ۲۰ کیلو نیوتن را انتقال دهد، مطلوب است،

الف) تنش برشی در پیچهای خزینه‌ای

ب)تنش برشی در محل اتصال جان با بالهای ناودانی.

پ) حداکثر تنش برشی در بالها.



(تمام ابعاد بر حسب میلی‌متر)

مسئله ۸-۷

$$\sum Ay = (۱۵ \times ۱۴۵)\left(\frac{۱۵}{۲}\right) + ۲\left[(۱۰۰ \times ۱۵)(۵۰)\right] + (۴۰ \times ۵۰)(۳۵) = ۲/۳۶ \times ۱۰^{۵}mm^{۳}$$

$$\sum A = ۱۵ \times ۱۴۵ + ۲\,(۱۰۰ \times ۱۵) + ۴۰ \times ۵۰ = ۷/۱۸ \times ۱۰^{۳}mm^{۲}$$

$$\bar{y} = \frac{۲/۳۶ \times ۱۰^{۵}}{۷/۱۸ \times ۱۰^{۳}} = ۳۲/۹\,mm$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۱۴۵)(۱۵)^{۳} + (۱۴۵ \times ۱۵)(۳۲/۹ - ۷/۵)^{۲}$$

$$+ ۲\left[\frac{۱}{۱۲}(۱۵)(۱۰۰)^{۳} + (۱۵ \times ۱۰۰)(۵۰ - ۳۲/۹)^{۲}\right]$$

$$+ \frac{۱}{۱۲}(۵۰)(۴۰)^{۳} + (۴۰ \times ۵۰)(۳۲/۹ - ۳۵)^{۲} = ۵/۰۱ \times ۱۰^{۶}mm^{۴}$$

الف)

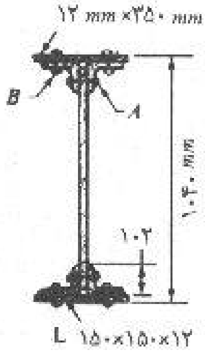
$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{۲۰ \times ۱۰^{۳} \times (۴۰ \times ۵۰)(۲/۱)}{۵/۰۱ \times ۱۰^{۶} \times ۵۰} = ۳۳۵ \times ۱۰^{-۳}N/mm^{۲} = ۳۳۵\,kPa$$

ب)

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{۲۰ \times ۱۰^{۳}\,(۱۷۵ \times ۱۵)(۲۵/۴)}{۵/۰۱ \times ۱۰^{۶} \times ۳۰} = ۸/۸۷\,N/mm^{۲} = ۸۸۷۰\,kPa$$

پ)

$$\tau_{max} = \frac{۲۰ \times ۱۰^{۳}\left[۱۵ \times \overbrace{(۱۰۰ - ۳۲/۹)}^{۶۷/۱}\left(\frac{۱۰۰ - ۳۲/۹}{۲}\right)\right]}{۵/۰۱ \times ۱۰^{۶} \times ۳۰} = ۴/۴۹\,N/m^{۲} = ۴۴۹۰\,kPa$$

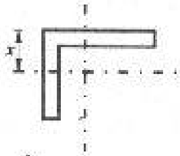


مسئله ۷-۹

۷-۹. یک تیر ورق از دو ورق بال به ابعاد ۱۲ × ۳۵۰ میلیمتر، یک ورق جان به ابعاد ۱۰ × ۱۰۰۰ میلیمتر و ۴ عدد نبشی ۱۲× ۱۵۰ × ۱۵۰ میلیمتر تشکیل یافته است (مطابق شکل). اگر قرار باشد که این مقطع برشی معادل ۶۵۰ کیلو نیوتن را انتقال دهد، فواصل پرچهای A و B چقدر باید باشد؟ لنگر ماند این تیر ورق حول محور خنثی مساوی ۱۰^۶ × ۵۹۲۲ میلیمتر به توان ۴ می‌باشد. پرچها به قطر ۲۲ میلیمتر می‌باشند که نیروی برشی آنها در حالت یک برشه مساوی ۳۰ کیلو نیوتن و در حالت دو برشی مساوی ۵۹ کیلو نیوتن می‌باشد. نیروی لهیدگی پیچهای فوق در مقابل ورق ۱۰ میلیمتر مساوی ۵۰ کیلو نیوتن است.

با استفاده از جدول ۱۰ ضمیمه مشخصات مورد نیاز L ۱۲ × ۱۵۰ × ۱۵۰ را استخراج می‌کنیم:

$x = 4.12\,Cm \quad , \quad A = 34.8\,Cm^2$



$$Q_A = 12 \times 350\left(\frac{1040}{2} - \frac{12}{2}\right) + 2(3440)\left(\frac{1040}{2} - 12 - 41.2\right) = 5.4\times 10^6\,mm^3$$

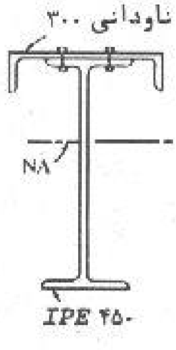
$$q_A = \frac{V_A Q_A}{I} = \frac{(650\times 10^3)(5.4\times 10^6)}{5922\times 10^6} = 5.9\times 10^2\,N/mm$$

$$S_A = \frac{F}{q} = \frac{59000}{5.9\times 10^2} = 1\,mm$$

$$Q_B = 12 \times 350\left(\frac{1040}{2} - \frac{12}{2}\right) = 2.16\times 10^6\,mm^3$$

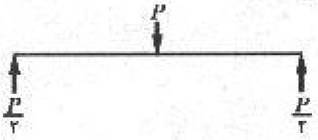
$$q_B = \frac{V_B Q_B}{I} = \frac{(650\times 10^3)(2.16\times 10^6)}{5922\times 10^6} = 2.37\times 10^2$$

$$S_B = \frac{F}{\frac{1}{2}q} = \frac{30000}{\frac{1}{2}\times 2.37\times 10^2} = 2.53\,mm$$

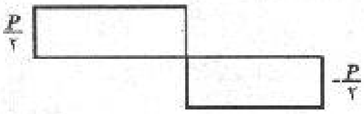


مسئله ۷-۱۰

۷-۱۰. مطابق شکل، مقطع یک تیر ساده از یک ناودانی ۳۰۰ و یک نیمرخ نیم پهن ۴۵۰ تشکیل یافته است. این دو نیمرخ توسط دو ردیف پرچ ۲۰ میلیمتر که در طول تیر در فواصل ۱۵۰ میلیمتری قرار دارند، به یکدیگر متصل شده‌اند. اگر تیر فوق توسط یک بار متمرکز ۵۰۰ کیلو نیوتنی در وسط دهانه بارگذاری شده باشد، حداکثر تنش برشی در پرچها چقدر خواهد بود. از وزن تیر صرف نظر کنید.



$V = \frac{P}{۲}$



مشخصات مورد نیاز نیمرخهای به کار رفته در تیر را از جدول ۴ و ۸ ضمیمه استخراج می‌کنیم:

$IPE۴۵۰ \;:\; A = ۹۸/۸\,cm^۲ \qquad I = ۳۳۷۴۰\,cm^۴$

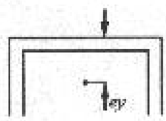
ناودانی ۳۰۰:

$A = ۵۸/۸\,cm^۲ \qquad I = ۴۹۵\,cm^۴ \qquad ey = ۲/۷\,cm \qquad S = ۱۰\,mm$

مبنای محاسبهٔ $\bar{y}$ را وسط نیمرخ IPE ۴۵۰ قرار می‌دهیم.

فاصله مرکز هندسی ناودانی تا محور خنثی: $d = \frac{۴۵۰}{۲} + ۱۰ - ۲۷ = ۱۳۰/۴$

$$\bar{y} = \frac{(۹۸۸۰)(۰) + (۵۸۸۰)(۱۳۰/۴)}{۹۸۸۰ + ۵۸۸۰} = ۷۷/۶\,mm$$



پس محل محور خنثی $۷۷/۶\,mm$ بالاتر از وسط نیمرخ IPE ۴۵۰ می‌باشد.

$$I = \sum(I_c + Ad^۲) = (۳۳۷۴۰ + ۹۸/۸ \times (۷/۷۶)^۲ + ۴۹۵ + ۵۸/۸(۱۳/۰۴)^۲$$

$$I = ۵۰۱۸۳\,Cm^۴ = ۵۰۱۸۳ \times ۱۰^۴\,mm^۴$$

$$Q = ۵۸۸۰ \times ۱۳۰/۴ = ۷۶۶۷۵۲\,mm^۳$$

$$q = \frac{\frac{P}{۲}Q}{I} = \frac{۲۵۰ \times ۱۰^۳ \times ۷۶۶۷۵}{۵۰۱۸۳ \times ۱۰^۴} = ۳۸۲\,N/mm$$

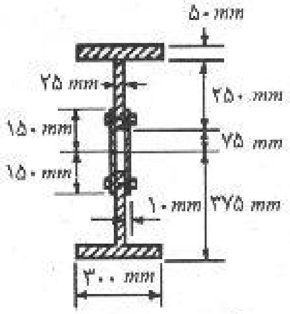
چون پرچها در دو ردیف و به فاصلهٔ $۱۵۰\,mm$ از یکدیگر واقع‌اند، بنابراین نیروی وارد بر هر پرچ چنین به دست می‌آید:

$$F = \frac{۳۸۲ \times ۱۵۰}{۲} = ۲۸۶۵۰\,N$$

و در نهایت تنش وارد بر هر پرچ:

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{۲۸۶۵۰}{\frac{\pi}{۴}(۲۰)^۲} = ۹۱/۲\,N/mm^۲$$

۷-۱۱. مقطع یک تیر ساده به دهانهٔ ۷ متر که بار ۹۰۰ کیلو نیوتنی را در وسط دهانه تحمل می‌کند، مطابق شکل است. اگر قطر پرچهای نشان داده شده در شکل مساوی ۲۲ میلیمتر و فاصلهٔ طولی آنها ۱۲۵ میلیمتر باشد، تحت تأثیر بار وارده، چه تنش برشی در پرچ تولید خواهد شد؟ لنگر ماند مقطع تیر در حول محور خنثی تقریباً مساوی ۴۳۰۰×۱۰^{۶} میلیمتر به توان ۴ می‌باشد.



(ابعاد برحسب میلی‌متر)

مسأله ۷-۱۱

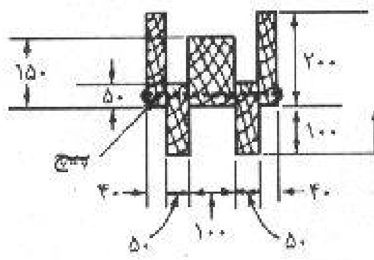
$$Q = (۵۰ \times ۳۰۰)(۳۵۰) + (۲۵ \times ۲۵۰)(۲۰۰) = ۶/۵ \times ۱۰^{۶}\, mm^{۳}$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{۴۵۰ \times ۱۰^{۳} \times ۶/۵ \times ۱۰^{۶}}{۴۳۰۰ \times ۱۰^{۶}} = ۶۸۰\, N/mm$$

چون پرچها تحت برش مضاعف می‌باشند:

$$\tau = \frac{F}{۲A} = \frac{qs}{۲A} = \frac{۶۸۰ \times ۱۲۵}{۲ \times \frac{\pi}{۴}(۲۲)^{۲}} = ۱۱۲\, N/mm^{۲}$$

۷-۱۲. تیری از ۵ الوار مجزا که مطابق شکل توسط پیچ به یکدیگر متصل شده‌اند، تشکیل یافته است. مقطع هر پیچ مساوی ۳۲۰ میلیمتر مربع و فاصلهٔ طولی آنها ۱۵۰ میلیمتر می‌باشد. اگر دهانهٔ این تیر مساوی ۲/۵ متر و بار وارد بر آن، شامل وزن مرده خود تیر، بار یکنواختی به شدت ۱۸ کیلو نیوتن بر متر باشد، حداکثر تنش برشی تولید شده در پیچها چقدر خواهد بود. لنگر ماند مقطع تیر مساوی ۲۴۳×۱۰^{۶} میلیمتر به توان ۴ می‌باشد.



(تمام ابعاد بر حسب میلی‌متر)

مسأله ۷-۱۲

$$V = \frac{۱}{۲}(wL) = \frac{۱}{۲}(۱۸ \times ۲/۵) = ۲۲/۵\, kN$$

$$\bar{y} = \frac{۲ \times (۵۰ \times ۱۵۰)(۷۵) + ۲ \times (۴۰ \times ۲۰۰)(۲۰۰) + (۱۰۰ \times ۱۵۰)(۱۷۵)}{۲ \times (۵۰ \times ۱۵۰) + ۲ \times (۴۰ \times ۲۰۰) + (۱۰۰ \times ۱۵۰)}$$

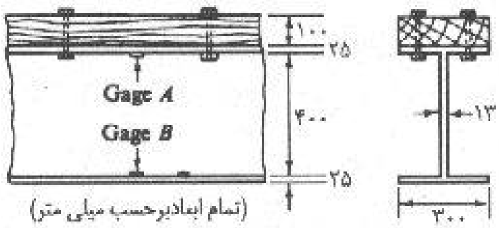
$\Rightarrow \bar{y} = ۱۵۱\, mm$ از پایین

$$Q = (۴۰ \times ۲۰۰)(۵۱) = ۴۰/۸ \times ۱۰^{۴}\, mm^{۳}$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{۲۲/۵ \times ۱۰^{۳} \times ۴۰/۸ \times ۱۰^{۴}}{۲۴۳ \times ۱۰^{۶}} = ۳۷/۸\, N/mm$$

$$\tau = \frac{qs}{A} = \frac{۳۷/۸ \times ۱۵۰}{۳۲۰} = ۱۷/۷\, MPa$$

۷-۱۳. مقطع یک تیر ساده به دهانهٔ ۱۰ متر که بار یکنواختی را در تمام طول دهانه تحمل می‌کند، از یک تخته به ابعاد ۳۰۰ × ۱۰۰ میلیمتر که مطابق شکل به بال فوقانی یک تیر فولادی توسط پیچ متصل شده است، تشکیل می‌شود. توسط دو کرنش سنج A و B که در سطح داخلی دو بال نصب شده‌اند، کرنش نقطهٔ A مساوی -۴۲۰×۱۰^{-۶} و کرنش نقطهٔ B مساوی $+۷۰۰ \times ۱۰^{-۶}$ میلیمتر بر میلیمتر اندازه‌گیری شده است. مطلوب است تعیین، (الف) نیروی کل مؤثر بر قطعهٔ چوبی در این مقطع (ب) اگر پیچها در دو ردیف و به فاصلهٔ طولی ۶۰۰ میلیمتر قرار داشته باشند، نیروی برشی حمل شده توسط هر پیچ چقدر است؟ فرض کنید که پیچها به طور مساوی در مقابله با نیروی وارده شرکت می‌کنند ضریب ارتجاعی فولاد را ۲×۱۰^{۵} و ضریب ارتجاعی چوب را $۰/۱ \times ۱۰^{۵}$ نیوتن بر میلیمتر مربع در نظر بگیرید.
(کرنش سنجها در وسط دهانه نصب شده‌اند).



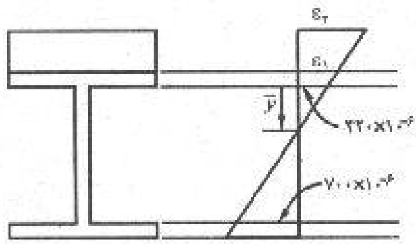
مسئله ۷-۱۳

الف)

$$\frac{\bar{y}}{۴۰۰} = \frac{۴۲۰}{۴۲۰ + ۷۰۰} \Rightarrow \bar{y} = ۱۵۰\, mm$$

$$\frac{\varepsilon_۱}{۱۷۵} = \frac{۴۲۰}{۱۵۰} \Rightarrow \varepsilon_۱ = ۴۹۰ \times ۱۰^{-۶} \qquad \sigma_۱ = E_w\, \varepsilon_۱ = ۴/۹\, N/mm^۲$$

$$\frac{\varepsilon_۲}{۲۷۵} = \frac{۴۲۰}{۱۵۰} \Rightarrow \varepsilon_۲ = ۷۷۰ \times ۱۰^{-۶} \qquad \sigma_۲ = E_w\, \varepsilon_۲ = ۷/۷\, N/mm^۲$$



$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_۱ + \sigma_۲}{۲} = ۶/۳$$

$$F = \sigma_{ave} \cdot A = ۶/۳ \times (۱۰۰ \times ۳۰۰) = ۱۸۹\, kN$$

$$\frac{۵}{۰/۶} = ۸/۳ \approx ۸$$ تعداد ردیف پیچها:

یعنی در نصف طول تیر ($۵m$) هشت ردیف پیچ وجود دارد.
چون در هر ردیف دو پیچ به کار رفته پس تعداد پیچها ۱۶ عدد می‌شود.

$$\frac{۱۸۹}{۱۶} = ۱۱/۸\, kN$$ نیروی برشی وارد بر هر پیچ

۷-۱۴. اگر تنش برشی مجاز برای چوب داگلاس فیر مساوی ۰/۷۰ نیوتن بر میلیمتر مربع (مگاپاسگال) باشد، مطلوب است تعیین ظرفیت نیروی برشی تائم یک تیر از این نوع چوب را

که مقطع آن به صورت مستطیل توپر به ابعاد ۱۰۰ × ۵۰ میلیمتر می‌باشد. مسأله را در دو حالت، یکی وقتی که ضلع ۵۰ میلیمتر به صورت قائم و دیگری وقتی که ضلع ۱۰۰ میلیمتری به صورت قائم قرار گرفته، حل نمایید.

$$\tau = \frac{۳}{۲}\,\frac{V}{A} \rightarrow V = \frac{۲}{۳}\tau A$$

$$V = \frac{۲}{۳}\,(۰/۷)(۵۰ \times ۱۰۰) = ۲۳۳۳N$$

جواب هر دو حالت یکسان می‌باشد.

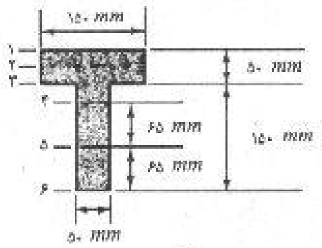
۷-۱۵. نشان دهید که حداکثر تنش برشی در یک مقطع دایره شکل توپر، تحت اثر نیروی برشی قائم V، مساوی $\frac{۴}{۳}V/A$ می‌باشد. A مساحت مقطع دایره می‌باشد.

$$\tau_{max} = \frac{VQ}{It} = \frac{V\left(\frac{۱}{۲}\pi r^{۲}\right)\left(\frac{۴r}{۳\pi}\right)}{\left(\frac{\pi r^{۴}}{۴}\right)(۲r)} = \frac{۴}{۳}\,\frac{V}{A}$$

۷-۱۶. نشان دهید که حداکثر تنش برشی در یک مقطع لوله‌ای جدار نازک تحت اثر نیروی برشی قائم V مساوی $۲V/A$ می‌باشد. A مساحت خالص مقطع لوله‌ای می‌باشد.

$$\tau_{max} = \frac{VQ}{It} = \frac{V\,(\pi rt)\,\left(\frac{۲r}{\pi}\right)}{(\pi r^{۳}t)(۲t)} = \frac{۲V}{۲\pi rt} = ۲\,\frac{V}{A}$$

۷-۱۷. مقطع سپری یک تیر چدنی دارای ابعاد مطابق شکل می‌باشد. لنگر ماند مقطع مزبور مساوی $۵۳/۱ \times ۱۰^{۶}$ میلیمتر به توان ۴ است. اگر نیروی برشی قائم وارد بر این مقطع مساوی ۲۴۰ کیلونیوتن باشد، مطلوب است تعیین تنش برشی در ترازهای نشان داده شده. نتایج را به صورت ترسیمی در ارتفاع تیر نمایش دهید.



مسأله ۷-۱۷

$$\bar{y} = \frac{(۱۵۰ \times ۵۰)(۲۵) + (۱۵۰ \times ۵۰)(۱۲۵)}{۲ \times ۱۵۰ \times ۵۰} = ۷۵mm$$ از بالا

$$Q_{۱} = ۰ \quad \text{و} \quad \tau = \frac{VQ}{It} \Rightarrow \tau_{۱} = ۰$$

$$Q_{۲} = (۱۵۰ \times ۲۵)\,(۷۵ - ۱۲/۵) = ۲/۳۴ \times ۱۰^{۵} mm^{۳}$$

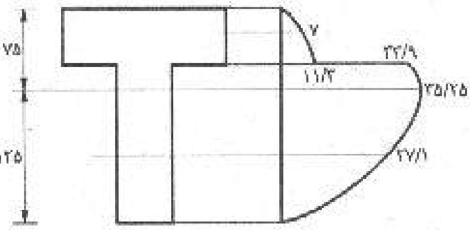
$$\tau_{۲} = \frac{۲۴۰ \times ۱۰^{۳} \times ۲/۳۴ \times ۱۰^{۵}}{۵۳/۱ \times ۱۰^{۶} \times ۱۵۰} = ۷MPa$$

$$Q_{۳} = (۱۵۰ \times ۵۰)(۷۵ - ۲۵) = ۳/۷۵ \times ۱۰^{۵} mm^{۳}$$

$$\tau_{۳} = \frac{۲۴۰ \times ۱۰^{۳} \times ۳/۷۵ \times ۱۰^{۵}}{۵۳/۱ \times ۱۰^{۶} \times (\text{۱۵۰ یا ۵۰})} = \text{۱۱/۳ یا ۳۳/۹}\ MPa$$

$$Q_{۴} = (۱۳۰ \times ۵۰)(۱۲۵ - ۶۵) = ۳/۹ \times ۱۰^{۵} mm^{۳}$$

$$\tau_{۴} = \frac{۲۴۰ \times ۱۰^{۳} \times ۳/۹ \times ۱۰^{۵}}{۵۳/۱ \times ۱۰^{۶} \times ۵۰} = ۳۵/۲۵\ MPa$$

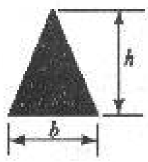


$$Q_{۵} = (۶۵ \times ۵۰)\left(۱۲۵ - \frac{۶۵}{۲}\right) = ۳ \times ۱۰^{۵} mm^{۳}$$

$$\tau_{۵} = \frac{۲۴۰ \times ۱۰^{۳} \times ۳ \times ۱۰^{۵}}{۵۳/۱ \times ۱۰^{۶} \times ۵۰} = ۲۷/۱\ MPa$$

$$\tau_{۶} = ۰$$

۷-۱۸. مقطع یک تیر به صورت یک مثلث متساوی‌الساقین است که طول پایهٔ b آن مساوی نصف ارتفاع h آن است. (الف) با استفاده از رابطهٔ اصلی تنش برشی و ریاضیات، محل حداکثر تنش برشی ناشی از نیروی برشی قائم V را به دست آورید. نمایش تغییرات نیروی برشی در روی مقطع را به دست آورید. (ب) اگر b مساوی ۸۰ میلیمتر و h مساوی ۱۶۰ میلیمتر و تنش برشی حداکثر به ۰/۸ نیوتن بر میلیمتر مربع محدود شده باشد، حداکثر نیروی برشی قائم V که این مقطع می‌تواند تحمل کند چقدر است؟



مسئله ۷-۱۸

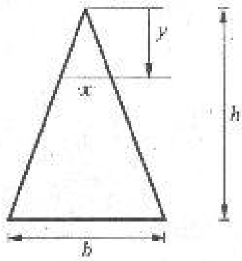
الف)

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

با توجه به این نکته که مقادیر V و I ثابت می‌باشند باید محلی را که در آن $\left(\frac{Q}{t}\right)$ بیشینه است پیدا کنیم.

$$x = \frac{b}{h} y = \frac{۱}{۲} y$$

$$\frac{Q}{t} = \frac{\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}y\right)y\left(\frac{۲}{۳}h - \frac{۲}{۳}y\right)}{\frac{۱}{۲}y} = \frac{۱}{۳}(hy - y^{۲})$$



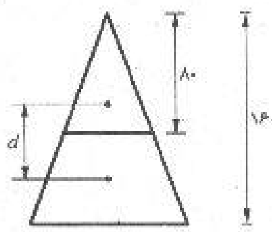
$$\frac{d\left(\frac{Q}{t}\right)}{dy} = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۳}(h - ۲y) = ۰ \rightarrow \boxed{y = \frac{h}{۲}}$$

$$b = \frac{h}{۲}$$

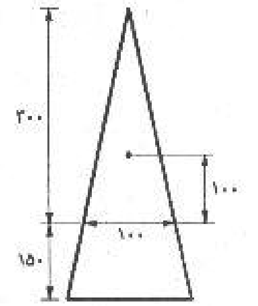
ب)

$$d = \frac{۲}{۳} \times ۱۶۰ - \frac{۲}{۳} \times ۸۰ = ۵۳/۳$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} \rightarrow V = \frac{\tau It}{Q} = \frac{۰/۸ \times \frac{۱}{۳۶}(۸۰)(۱۶۰)^{۳}(۴۰)}{\frac{۱}{۲}(۴۰)(۸۰)(۵۳/۳)} = ۳۴۱۵N$$



۷-۱۹. **مقطع یک تیر که به صورت مثلث متساوی‌الساقین، به پایهٔ ۱۵۰ = b و به ارتفاع ۴۵۰ = h میلیمتر، می‌باشد، تحت تأثیر نیروی برشی قائم ۲۷۰۰۰ نیوتن قرار دارد. مطلوب است تعیین تنش برشی افقی در محور خنثی و وسط ارتفاع. بعد از تعیین تنش در چند نقطه دیگر، نتایج را به صورت ترسیمهٔ تغییرات تنش برشی در ارتفاع مقطع، نمایش دهید.**



$$Q = \left(\frac{۱}{۲} \times ۱۰۰ \times ۳۰۰\right)(۱۰۰) = ۱/۵ \times ۱۰^{۶}\, mm^{۳}$$

$$I = \frac{۱}{۳۶}(۱۵۰)(۴۵۰)^{۳} = ۳/۸ \times ۱۰^{۸}\, mm^{۴}$$

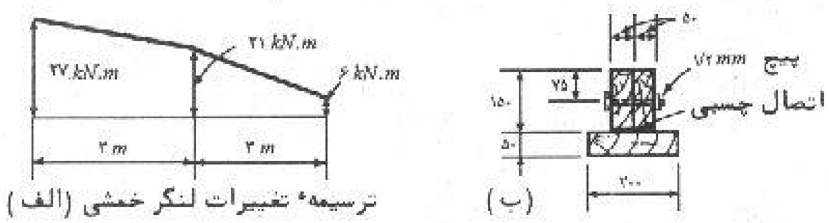
$$\tau_{NA} = \frac{VQ}{It} = \frac{۲۷۰۰۰ \times ۱/۵ \times ۱۰^{۶}}{۳/۸ \times ۱۰^{۸} \times ۱۰۰} = ۱/۰۷\, MPa$$

$$Q = \left(\frac{۱}{۲} \times ۷۵ \times ۲۲۵\right)(۱۵۰) = ۱/۲۶۶ \times ۱۰^{۶}\, mm^{۳}$$

$$\tau = \frac{۲۷۰۰۰ \times ۱/۲۶۶ \times ۱۰^{۶}}{۳/۸ \times ۱۰^{۸} \times ۷۵} = ۱/۲\, MPa$$

منحنی توزیع تنش سهمی با ماکزیمم ۱/۲ می‌باشد.

۷-۲۰. **تیری با مقطع نشان داده شده، طوری بارگذاری شده است که تغییرات لنگر خمشی آن مطابق شکل می‌باشد. مطلوب است (الف) حداکثر نیروی برشی افقی در پیچهای ۱۲ میلیمتری که به فاصلهٔ ۳۰۰ میلیمتر از یکدیگر قرار دارند. (ب) حداکثر تنش برشی در اتصال چسبی.**



ترسیمهٔ تغییرات لنگر خمشی (الف)　　(ب)

مسئله ۷-۲۰

الف)

دو بلوک ۵۰ × ۱۵۰ میلیمتری مثل یک بلوک واحد عمل می‌کنند. $\tau = ۰$

ب)

$$V = \frac{dM}{dx} \qquad V_{۱} = \frac{۲۷ - ۲۱}{۳} = ۲\, kN \qquad V_{۲} = \frac{۲۱ - ۶}{۳} = ۵\, kN$$

در نتیجه: $V_{max} = ۵\, kN$

$$\bar{y} = \frac{(۲۰۰ \times ۵۰)\ (۲۵) + (۱۰۰ \times ۱۵۰)(۱۲۵)}{۲۰۰ \times ۱۵۰ + ۱۰۰ \times ۱۵۰} = ۸۵\, mm \quad \text{از پایین}$$

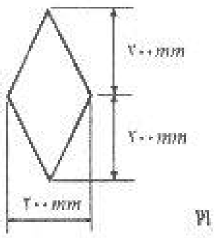
$$I = \frac{1}{12}(200)(50)^3 + (200\times 50)(60)^2 + \frac{1}{12}(100)(150)^3 + (100\times 150)(40)^2$$

$$\Rightarrow I = 90/2 \times 10^6\, mm^4$$

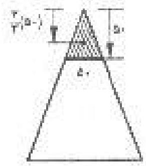
$$Q = (200\times 50)(85 - 25) = 6\times 10^5\, mm^3$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(5000)(6\times 10^5)}{(90/2\times 10^6)\times(100)} = 0/332\, MPa = 332\, kPa$$

۷-۲۱. مقطع تیری به شکل لوزی می‌باشد (مطابق شکل). بر این مقطع نیروی برشی قائمی مساوی ۵۰۰۰ نیوتن وارد می‌شود. با تعیین تنش برشی در فواصل ۵۰ میلیمتری، ترسیمهٔ تغییرات تنش برشی در ارتفاع مقطع را ترسیم نمایید.



مسئله ۷-۲۱



$$I = 2\times\frac{1}{12}(200)(200)^3 = 2/67\times 10^8\, mm^4$$

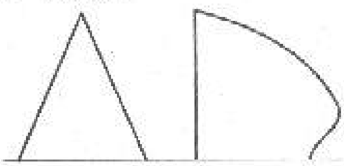
$$\tau = \frac{VQ}{It} \qquad \tau_1 = 0$$

$$\tau_2 = \frac{(5000)\left[\left(\frac{1}{2}\times 50\times 50\right)\times\left(200 - \frac{2}{3}\times 50\right)\right]}{(2/67\times 10^8)(50)} = 0/0782\, MPa = 78/2\, kPa$$

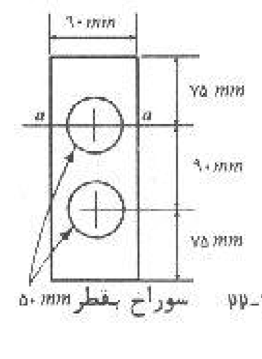
$$\tau_3 = \frac{(5000)\left[\left(\frac{1}{2}\times 100\times 100\right)\times\left(200 - \frac{2}{3}\times 100\right)\right]}{(2/67\times 10^8)(100)} = 125\, kPa$$

$$\tau_4 = \frac{(5000)\left[\left(\frac{1}{2}\times 150\times 150\right)\times\left(200 - \frac{2}{3}\times 150\right)\right]}{(2/67\times 10^8)(150)} = 140\, kPa$$

$$\tau_5 = \frac{5000\left[\left(\frac{1}{2}\times 200\times 200\right)\times\left(\frac{200}{3}\right)\right]}{(2/67\times 10^8)(200)} = 125\, kPa$$



۷-۲۲. مقطع یک تیر چدنی مطابق شکل می‌باشد. اگر تنش کششی مجاز مساوی ۵۰، تنش فشاری مجاز مساوی ۲۰۵ و تنش برشی مجاز مساوی ۵۵ نیوتن بر میلیمتر مربع باشد، حداکثر نیروی برشی مجاز و حداکثر لنگر خمشی مجاز وارد بر این مقطع چقدر خواهد بود. فقط بارهای شاقولی را در نظر بگیرید و محاسبات خود را محدود به تراز $a - a$ نمایید.



مسئله ۷-۲۲

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۰/۰۹)(۰/۲۴)^{۳} - ۲\left[\frac{\pi}{۴}(۰/۰۲۵)^{۴} + \pi(۰/۰۲۵)^{۲} \times (۰/۰۴۵)^{۲}\right] = ۹/۵ \times ۱۰^{-۵} m^{۴}$$

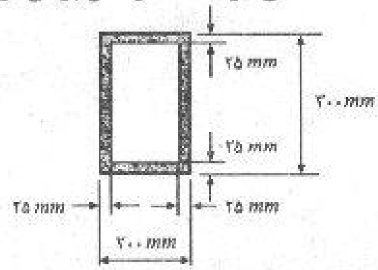
$$Q = (۰/۰۹ \times ۰/۰۷۵)\left(۷۵ + ۴۵ - \frac{۷۵}{۲}\right) - \frac{۱}{۲}\pi(۰/۰۲۵)^{۲} \times \left(۰/۰۴۵ + \frac{۴(۰/۰۲۵)}{۳\pi}\right)$$

$$= ۰/۵۵۷\ m^{۳}$$

$$V = \frac{\tau It}{Q} = \frac{(۵۵ \times ۱۰^{۶})(۹/۵ \times ۱۰^{-۵})(۰/۰۴)}{۰/۵۵۷} = ۳۷۵.\ kN$$

$$M = \frac{\sigma I}{c} = \frac{(۵۰ \times ۱۰^{۶})(۹/۵ \times ۱۰^{-۵})}{۰/۱۲} = ۳۹/۶\ kN.m$$

۷-۲۳. مقطع جعبه‌ای نشان داده شده در شکل، مقطع یک تیر ساده می‌باشد. در یک ناحیهٔ مشخص از تیر، تغییرات لنگر خمشی خطی و با شیب ۴۰۰۰ نیوتن متر بر متر در امتداد محور تیر صورت می‌گیرد. حداکثر تنش برشی تولید شده در مقطع در این ناحیه چقدر است.



مسئله ۷-۲۳

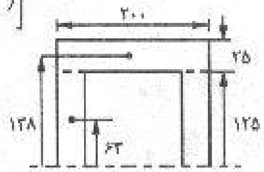
$$V = \frac{\Delta M}{\Delta L} = ۴\ kN$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۰/۲)(۰/۳)^{۳} - \frac{۱}{۱۲}(۰/۱۵)(۰/۲۵)^{۳}$$

$$= ۲/۵۵ \times ۱۰^{-۴} m^{۴}$$

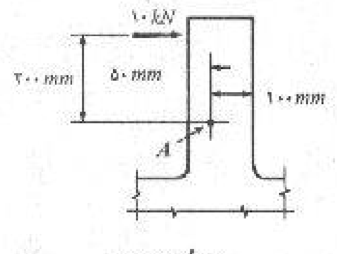
$$Q = \left[(۰/۲ \times ۰/۰۲۵)(۰/۱۳۸) + ۲\,(۰/۱۲۵ \times ۰/۰۲۵)(۰/۰۶۳)\right]$$

$$= ۱/۰۸ \times ۱۰^{-۳} m^{۳}$$

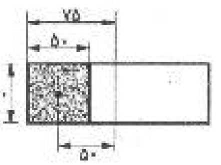


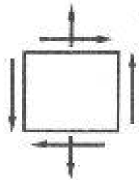
$$\tau_{max} = \frac{VQ}{It} = \frac{۴ \times ۱/۰۸ \times ۱۰^{-۳}}{(۲/۵۵ \times ۱۰^{-۴})(۰/۰۵)} = ۳۴۰\ kPa$$

۷-۲۴. زائده لچکی مانندی از یک ماشین که دارای مقطع مربع مستطیل ۱۵۰ × ۴۰ میلیمتر می‌باشد، مطابق شکل تحت اثر نیروی متمرکز ۱۰ کیلو نیوتنی قرار دارد. مطلوب است تعیین تنشهای برشی در یک جزء کوچک که در نقطهٔ A قرار دارد. نتایج را به صورت ترسیمی در روی یک جزء کوچک نمایش دهید. از آنجایی که این جزء کوچک تحت تنش قائم نیز می‌باشد، بدون محاسبهٔ این تنش، تنشهای قائم را با جهت صحیح در روی جزء کوچک نمایش دهید.



مسئله ۷-۲۴





$$Q = (۵۰ \times ۴۰)(۵۰) = ۱۰^۵ mm^۳$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۴۰)(۱۵۰)^۳ = ۱۱/۲۵ \times ۱۰^۶ mm^۴$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(۱۰ \times ۱۰^۳)(۱۰^۵)}{(۱۱/۲۵ \times ۱۰^۶)(۴۰)} = ۲/۲۲ MPa$$

۲۵-۷. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی در مقطع $A - A$ از لچکی مثال ۶-۵. نتایج را در روی یک جزء سطح نمایش دهید. آیا در روی این جزء سطح تنش خمشی نیز تأثیر می‌کند.

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

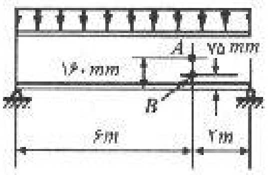
$$V = ۳۶/۳ kN \quad , \quad I = ۵/۶۴ \times ۱۰^۶ mm^۴$$

$$Q = ۲ \times ۲۵ \times (۱۰۰ - ۴۲/۵)\frac{(۱۰۰ - ۴۲/۵)}{۲} = ۸۲۶۵۶/۳ mm^۳$$

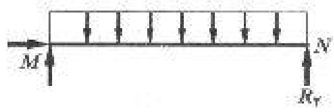
$$\tau = \frac{۳۶۳۰۰ \times ۸۲۶۵۶/۳}{(۵/۶۴ \times ۱۰^۶)(۲ \times ۲۵)} = ۱۰/۶۴ MPa$$

اگر جزء سطح روی محور خنثی باشد تنش خمشی بر آن تأثیر نمی‌کند در غیر این صورت تنش خمشی نیز روی آن موجود است.

۲۶-۷. یک نیم رخ IPE ۳۶۰ باری معادل ۶۰ کیلو نیوتن بر متر را که شامل وزن خودش نیز می‌باشد، تحت دهانهٔ سادهٔ ۸ متر تحمل می‌کند (مطابق شکل).
مطلوب است تعیین تنشهای برشی در نقاط A و B. تنشهای به دست آمده را در روی یک جزء سطح با جهتهای مربوطه نمایش دهید. اگر در روی این جزء سطحها، تنشهای خمشی نیز تأثیر می‌کند، بدون محاسبهٔ این تنشها، آنها را با جهت صحیح در روی شکل نشان دهید.

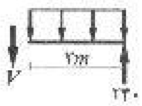


مسئله ۲۶-۷

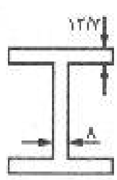


$$\sum M_M = ۰ : ۶۰ \times ۸ \times ۴ - R_۲ \times ۸ = ۰ \rightarrow R_۲ = ۲۴۰ kN$$

$$V = ۲۴۰ - ۶۰ \times ۲ = ۱۲۰ kN$$



با مراجعه به جدول ۲ ضمیمه مشخصات مورد نیاز برای IPE ۳۶۰ به دست می‌آید.



$$Q_A = ۱۲/۷ \times ۱۷۰ \times (۱۸۰ - ۶/۳۵) + (۱۸۰ - ۱۲/۷) \times ۸ \times \left(\frac{۱۸۰ - ۱۲/۷}{۲}\right)$$

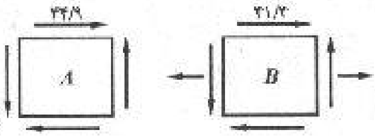
$$Q_A = ۴/۸۷ \times ۱۰^۵ mm^۳$$

$$\tau_A = \frac{VQ_A}{It} = \frac{(۱۲۰ \times ۱۰^۳)(۴/۸۷ \times ۱۰^۵)}{(۱۶۲۷۰ \times ۱۰^۴)(۸)} = ۴۴/۹ MPa$$

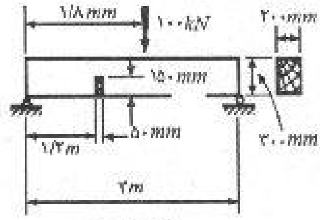
$$Q_B = 12/7 \times 170 \times (180 - 6/35) + (75 - 12/7) \times 8 \times \left(\frac{75 - 12/7}{2}\right) \times 8 \times (180 - 75)$$

$$Q_B = 4/49 \times 10^5$$

$$\tau_B = \frac{VQ_B}{It} = \frac{(120 \times 10^3)(4/49 \times 10^5)}{(16270 \times 10^4)(8)} = 41/4\ MPa$$



۷-۲۷. یک تیر با مقطع مستطیل توپر به ابعاد ۳۰۰ × ۲۰۰ میلیمتر، مطابق شکل بارگذاری شده است. از این تیر یک قطعهٔ ۲۰۰ × ۱۵۰ × ۵۰ میلیمتر که در شکل به صورت سایه‌دار نشان داده شده است، جدا نمایید. سپس در روی ترسیمهٔ جسم آزاد این قطعه، نقطهٔ تأثیر، مقدار و جهت تمام نیروهای برآیند ناشی از تنشهای برشی و خمشی را نشان دهید. از وزن تیر صرف نظر کنید.

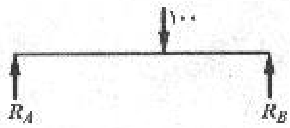


مسئله ۷-۲۷

$$\sum M_A = 0 \quad : \quad R_B \times 3 = 100 \times 1/8 \Rightarrow R_B = 60\ kN$$

$$\sum Fy = 0 : \quad R_A = 40\ kN$$

$$I = \frac{1}{12} 2 (0/2)(0/3)^3 = 4/5 \times 10^{-4} m^4$$

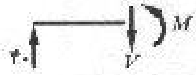


$$\sigma_L = \frac{M_L y}{I} = \frac{(40 \times 1/2)(0/15)}{4/5 \times 10^{-4}} = 16000\ kN/m^2$$

$$\sigma_R = \frac{M_R y}{I} = \frac{(40 \times 1/25)(0/15)}{4/5 \times 10^{-4}} = 16700\ kN/m^2$$

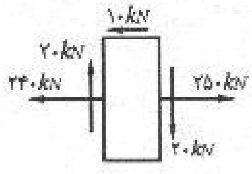
$$F_L = \frac{1}{2}(16000)(0/15 \times 0/2) = 240\ kN$$

$$F_R = \frac{1}{2}(16700)(0/15 \times 0/2) = 250\ kN$$



$$Q = (0/15 \times 0/2)(0/075) = 2/25 \times 10^{-3}$$

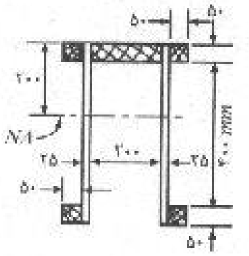
$$\tau_{max} = \frac{VQ}{It} = \frac{40 \times 2/25 \times 10^{-3}}{4/5 \times 10^{-4} \times 0/2} = 1000\ kN/m^2 = 1\ MPa$$



نیروی برشی $= 1000 \times (0/05 \times 0/2) = 10\ kN$

نیروی عمودی $= \frac{V}{2} = \frac{40}{2} = 20\ kN$

۷-۲۸. مطابق شکل، مقطع یک تیر از به هم چسباندن چند قطعه تخته سه لایی ساخته شده است. در یک مقطع بحرانی، این مقطع باید بتواند نیروی برشی قائمی معادل ۱۵ کیلو نیوتن را تحمل کند.



مسئله ۷-۲۸

مطلوب است تعیین تنش برشی حداکثر در سطوح تماس قطعات به هم چسبیده به منظور انتخاب چسب مناسب برای کار. لنگر ماند کل مقطع در حول محور خنثی مساوی ۱۴۲۵×۱۰^۶ میلیمتر به توان ۴ می‌باشد.

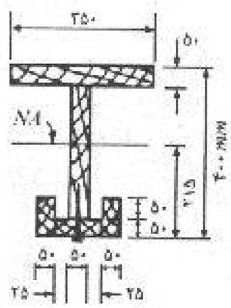
تنش برشی در سطوح پایینی

$$\tau_a = \frac{(۱۵ \times ۱۰^۳)\left[(۵۰ \times ۵۰) \times ۲۷۵\right]}{(۱۴۲۵ \times ۱۰^۶)(۵۰)} = ۰/۱۴۴\, MPa = ۱۴۴\, kN/m^۲$$

تنش برشی در سطوح بالا

$$\tau_b = \frac{(۱۵ \times ۱۰^۳)\left[(۵۰ \times ۲۰۰) \times ۱۷۵\right]}{(۱۴۲۵ \times ۱۰^۶) \times ۲(۵۰)} = ۰/۱۸۴\, MPa = ۱۸۴\, kN/m^۲$$

۷-۲۹. مقطع یک تیر چوبی مطابق شکل می‌باشد. اتصال بال پایینی به جان توسط میخهایی که به فاصلهٔ ۴۰ میلیمتر در امتداد طولی تیر کوبیده شده‌اند، تأمین می‌شود. اتصال دو قسمت قائم بال پایینی به قسمت افقی، توسط چسب تأمین شده است. اگر این مقطع تحت تأثیر نیروی برشی قائم ۲۵ کیلو نیوتن قرار داشته باشد؛ مطلوب است تعیین نیروی برشی موجود در میخها و تنش برشی در چسب. لنگر ماند کل مقطع در حول محور خنثی مساوی ۱۰۳۰×۱۰^۶ میلیمتر به توان ۴ می‌باشد.



مسئله ۷-۲۹

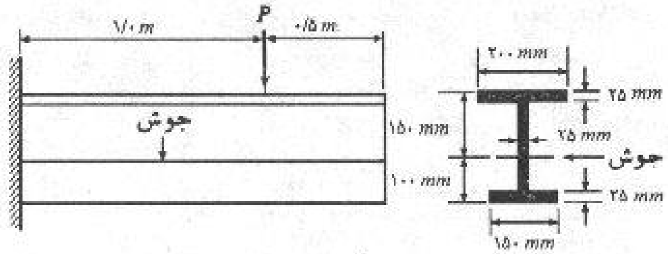
تنش برشی در چسب:

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{۲۵۰۰۰\left[(۱۰۰ \times ۵۰)\,(۲۱۵ - ۵۰)\right]}{(۱۰۳۰ \times ۱۰^۶)(۵۰)} = ۰/۴۰\, MPa$$

$$F = qs = \frac{VQ}{I}s$$

$$F = \frac{(۲۵۰۰۰)\left[۲\,(۱۰۰ \times ۵۰)\,(۲۱۵ - ۵۰) + (۱۰۰ \times ۵۰)(۲۱۵ - ۲۵)\right]}{(۱۰۳۰ \times ۱۰^۶)} \times (۴۰) = ۲۵۲۴\, N$$

۷-۳۰. مطابق شکل، مقطع یک تیر طره‌ای به دهانهٔ ۱/۵ متر از جوش دادن دو نیمرخ سپری به یکدیگر ساخته شده است. مطلوب است تعیین نیروی P که تیر می‌تواند در وضعیت نشان داده شده تحمل کند. از وزن تیر صرف نظر کنید. تنش مجاز خمشی در فشار و کشش مساوی ۱۵۰ نیوتن بر میلیمتر مربع و تنش مجاز برشی در مصالح نیمرخها مساوی ۱۰۰ نیوتن بر میلیمتر مربع و نیروی برشی مجاز در مصالح جوش مساوی ۲ کیلو نیوتن بر میلیمتر طول جوش می‌باشد.



مسأله ۷-۳۰

$$\sum Ay = (۰/۰۲۵\times ۰/۱۵)(۰/۰۱۲۵)+(۰/۲\times ۰/۰۲۵)(۰/۱۲۵)+(۰/۰۲۵\times ۰/۲)(۰/۲۳۷۵)$$

$$= ۱/۸۶\times ۱۰^{-۳}m^{۳}$$

$$\sum A = (۰/۰۲۵\times ۰/۱۵) + (۰/۲\times ۰/۰۲۵) + (۰/۰۲۵\times ۰/۲) = ۱/۳۷۵\times ۱۰^{-۲}m^{۲}$$

$$\bar{y} = \frac{۱/۸۶\times ۱۰^{-۳}}{۱/۳۷۵\times ۱۰^{-۲}} = ۰/۱۳۵m$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۰/۲)(۰/۰۲۵)^{۳} + (۰/۲\times ۰/۰۲۵)(۰/۱۰۳)^{۲} + \frac{۱}{۱۲}(۰/۰۲۵)(۰/۲)^{۳}$$

$$+ (۰/۰۲۵\times ۰/۲)(۰/۰۱)^{۲} + \frac{۱}{۱۲}(۰/۱۵)(۰/۰۲۵)^{۳} + (۰/۱۵\times ۰/۰۲۵)(۰/۱۲۳)^{۲}$$

$$= ۱/۳\times ۱۰^{-۴}m^{۴}$$

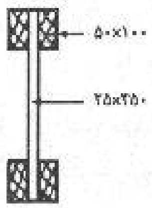
$$\sigma = \frac{M.c}{I} \quad \Rightarrow P\times ۱ = \frac{\sigma I}{c} = \frac{(۱۵۰\times ۱۰^{۶})(۱/۳\times ۱۰^{-۴})}{۰/۱۳۵} = ۱۴۴kN$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} \Rightarrow P = \frac{\tau It}{Q} = \frac{(۱۰۰\times ۱۰^{۶})(۱/۳\times ۱۰^{-۴})(۰/۰۲۵)}{(۰/۰۲۵\times ۰/۱۵)(۰/۱۲۳) + (۰/۰۲۵\times ۰/۱۱)\left(\frac{۰/۱۱}{۲}\right)}$$

$$= ۵۳۱۰۰۰N = ۵۳۱kN$$

$$q = \frac{VQ}{I} \Rightarrow P = \frac{qI}{Q} = \frac{(۲\times ۱۰^{۶})(۱/۳\times ۱۰^{-۴})}{(۰/۰۲۵\times ۰/۱۵)(۰/۱۲۳) + (۰/۰۲۵\times ۰/۰۷۵)(۰/۰۷۲۵)} = ۴۳۵kN$$

کمترین مقدار به دست آمده برای P جواب مسأله می‌باشد. $P = ۱۴۴kN$



مسأله ۷-۳۱

۷-۳۱. مقطع یک تیر از چهار قطعه چوب داگلاس فیر به ابعاد ۱۰۰ × ۵۰ میلیمتر که به یک سه لایی داگلاس فیر به ابعاد ۴۵۰ × ۲۵ میلیمتر چسب شده‌اند، تشکیل شده است (مطابق شکل). مطلوب است تعیین حداکثر نیروی برشی مجاز و حداکثر لنگر خمشی مجاز در صورتی که تنش خمشی مجاز مساوی ۱۰ نیوتن بر میلیمتر مربع و تنش برشی مجاز در مصالح چوب مساوی ۰/۶ نیوتن بر میلیمتر مربع و تنش

برشی مجاز در اتصال چسبی ۰/۳ نیوتن بر میلیمتر مربع باشد. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل برحسب میلیمتر می‌باشند.

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۰/۱۲۵)(۰/۴۵)^{۳} - \frac{۱}{۱۲}(۰/۱)(۰/۲۵)^{۳} = ۸/۱۹ \times ۱۰^{-۴} m^{۴}$$

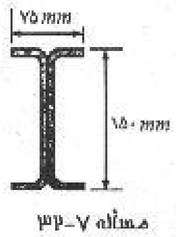
$$M = \frac{\sigma I}{c} = \frac{(۱۰ \times ۱۰^{۶})(۸/۱۹ \times ۱۰^{-۴})}{۰/۲۲۵} = ۳۶۴۰۰ \, N.m = ۳۶/۴ \, kN.m$$

$$V_{(\text{چسب})} = \frac{\tau Ib}{Q} = \frac{(۰/۳ \times ۱۰^{۶})(۸/۱۹ \times ۱۰^{-۴})(۰/۱)}{(۰/۰۵ \times ۰/۱)(۰/۱۷۵)} = ۲۸/۱ \, kN$$

$$V_{(\text{چوب})} = \frac{(۰/۶ \times ۱۰^{۶})(۸/۱۹ \times ۱۰^{-۴})(۰/۰۲۵)}{(۰/۱۲۵ \times ۰/۱)(۰/۱۷۵) + (۰/۰۲۵ \times ۰/۱۲۵)(\frac{۰/۱۲۵}{۲})} = ۵/۱۶ \, kN$$

حداکثر نیروی برشی مجاز $۵/۱۶ \, kN$ می‌باشد.

۷-۳۲. مقطع یک نیمرخ نیمه سبک مطابق شکل می‌باشد. (الف) اگر ضخامت ورقی که پروفیلهای فوق از آن ساخته شده مساوی ۳/۴ میلیمتر و تنش خمشی مجاز مساوی ۱۲۵ نیوتن بر میلیمتر مربع باشد، حداکثر لنگر خمشی مجاز مقطع چقدر می‌باشد؟ (ب) اگر تنش برشی مجاز مساوی ۸۰ نیوتن بر میلیمتر مربع باشد، حداکثر نیروی برشی مجاز برای مقطع فوق چقدر است. در محاسبات از گردی گوشه‌های نیمرخها صرف نظر نمایید.



مسأله ۷-۳۲

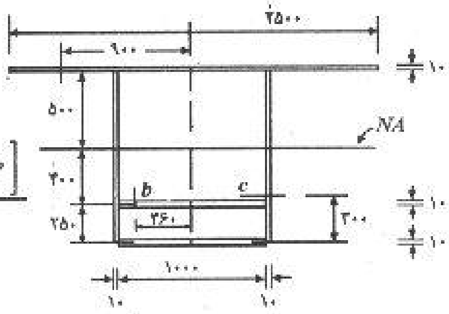
$$I = \frac{۱}{۱۲}(۷۵)(۱۵۰)^{۳} - \frac{۱}{۱۲}(۷۵ - ۲ \times ۳/۴)(۱۵۰ - ۲ \times ۳/۴)^{۳} = ۴/۴ \times ۱۰^{۶} \, mm^{۴}$$

$$M = \frac{\sigma I}{c} = \frac{(۱۲۵)(۴/۴ \times ۱۰^{۶})}{۷۵} = ۷/۳۳ \times ۱۰^{۶} \, N.mm = ۷۳۳ \, kN.m$$

$$Q = (۷۵ \times ۳/۴)\left(۷۵ - \frac{۳/۴}{۲}\right) + \left[(۲ \times ۳/۴) \times (۷۵ - ۳/۴) \times \left(\frac{۷۵ - ۳/۴}{۲}\right)\right]$$
$$= ۳۶۱۲۱/۸ \, mm^{۳}$$

$$V = \frac{\tau It}{Q} = \frac{(۸۰)(۴/۴ \times ۱۰^{۶})(۶/۸)}{۳۶۱۲۱/۸} = ۶۶/۲۶۵ \, kN$$

۷-۳۳. ابعاد مقطع یک تیر جعبه‌ای که نیروی برشی قائمی مساوی ۱۵۰۰ کیلو نیوتن را انتقال می‌دهد، مطابق شکل است. مطلوب است تعیین تنشهای برشی در مقاطع a، b و c. لنگر ماند مقطع حول محور خنثی مساوی $۱۰^{۶} \times ۱۵۰۰۰$ میلیمتر به توان ۴ می‌باشد.



(تمام ابعاد برحسب میلی‌متر)

مسئله ۷-۳۳

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

$$\tau_a = \frac{(۱۵۰۰ \times ۱۰^{۳})\left[\left(\frac{۲۵۰۰}{۲} - ۹۰۰\right) \times ۱۰ \times ۵۰۰\right]}{(۱۵ \times ۱۰^{۹})(۱۰)}$$

$$= ۱۷/۵\, MPa$$

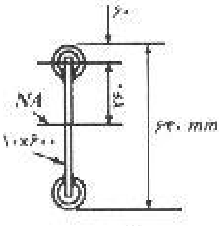
$$\tau_b = \frac{(۱۵۰۰ \times ۱۰^{۳})\left[(۳۶۰ \times ۱۰)(۴۰۰)\right]}{(۱۵ \times ۱۰^{۹})(۱۰)} = ۱۴/۴\, MPa$$

$$Q_c = (۱۰۰۰ \times ۱۰) \times ۶۵۰ + (۱۰۰۰ \times ۱۰) \times ۴۰۰ + ۲ \times (۳۰۰ \times ۱۰) \times \left(۶۵۰ - \frac{۳۰۰}{۲}\right)$$

$$= ۱۳/۵ \times ۱۰^{۶}\, mm^{۳}$$

$$\tau_c = \frac{(۱۵۰۰ \times ۱۰^{۳})(۱۳/۵ \times ۱۰^{۶})}{(۱۵ \times ۱۰^{۹})(۲ \times ۱۰)} = ۶۷/۵\, MPa$$

۷-۳۴. با شکاف دادن دو نیم‌رخ لوله‌ای به قطر ۱۲۰ و به ضخامت ۱۰ میلیمتر و سپس جوش آنها به یک ورق ۶۰۰ × ۱۰ میلیمتر، مقطعی مطابق شکل ساخته‌ایم. لنگر ماند مقطع کل در حول محور خنثای مربوطه مساوی ۱۰۶ × ۴۶۳ میلیمتر به توان ۴ می‌باشد. اگر این مقطع نیروی برشی قائمی مساوی ۱۸۰ کیلونیوتن را انتقال دهد، مطلوب است تعیین تنش برشی در لوله و ورق جان در ترازی مساوی ۲۶۰ میلیمتر بالای محور خنثی.



مسئله ۷-۳۴

$$A = \frac{\pi}{۴}(۱۲۰^{۲} - ۱۰۰^{۲}) = ۳۴۵۵/۷\, mm^{۲}$$

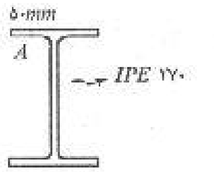
$$\bar{R} = \frac{۶۰ + ۵۰}{۲} = ۵۵\, mm \qquad \bar{y} = ۲۶۰ + \frac{۲\bar{R}}{\pi} = ۲۹۵\, mm$$

$$Q_p = \left(\frac{۱}{۲} \times ۳۴۵۵/۷\right)(۲۹۵) = ۵/۱ \times ۱۰^{۵}\, mm^{۳}$$

$$\tau_{pipe} = \frac{(۱۸۰ \times ۱۰^{۳})(۵/۱ \times ۱۰^{۵})}{(۴۶۳ \times ۱۰^{۶})(۲ \times ۱۰)} = ۱۰/۵۳\, MPa$$

$$Q_w = (۳۰۰ - ۲۶۰) \times ۱۰ \times \left(۲۶۰ + \frac{۳۰۰ - ۲۶۰}{۲}\right) = ۱/۱۲ \times ۱۰^{۵}\, mm^{۳}$$

$$\tau_{web} = \frac{(۱۸۰ \times ۱۰^{۳})(۱/۱۲ \times ۱۰^{۵})}{(۴۶۳ \times ۱۰^{۶})(۱۰)} = ۴/۳۵\, MPa$$



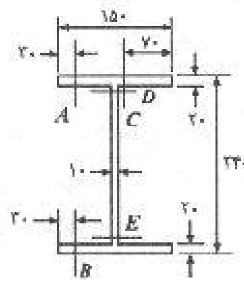
مسأله ۷-۳۵

۷-۳۵. مطلوب است تعیین تنش برشی در مقطع A از یک تیر IPE ۲۷۰ که نیروی برشی قائمی مساوی ۹۰ کیلونیوتن و لنگر خمشی ۳/۵ کیلو نیوتن متر را حمل می‌کند.

$$\tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{(۹۰ \times ۱۰^۳)\left[(۵۰ \times ۱۰/۲)\left(\frac{۲۷۰}{۲} - \frac{۱۰/۲}{۲}\right)\right]}{(۵۷۹۰ \times ۱۰^۴)(۱۰/۲)} = ۱۰/۱\, MPa$$

مشخصات مورد نیاز از جدول ۴ ضمیمه برداشت شده است.

۷-۳۶. تیری با مقطع نشان داده شده در شکل مفروض است. اگر در ناحیه‌ای از این تیر، نیروی برشی مثبتی مساوی ۱۰۰ کیلونیوتن وجود داشته باشد، مطلوب است، (الف) جریان برش q که در هر یک از پنج مقطع نشان داده شده وجود دارد. (ب) فرض کنید که لنگر خمشی مثبتی معادل ۲۷۰۰۰ نیوتن در یک مقطع از تیر عمل می‌کند و در مقطع دیگری که به فاصله ۱۰ میلیمتر از آن قرار دارد، لنگر خمشی بزرگتری وارد می‌شود. یک طرح سه بعدی از تطعاتی که توسط این دو مقطع عرضی و پنج مقطع A، B، C، D و E از تیر جدا می‌شوند، رسم نمایید و در روی آنها تمام نیروهای مؤثر را نشان دهید. از تنش برشی قائم در بالها صرف نظر نمایید.(تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلیمتر هستند)



(ابعاد برحسب میلی‌متر)

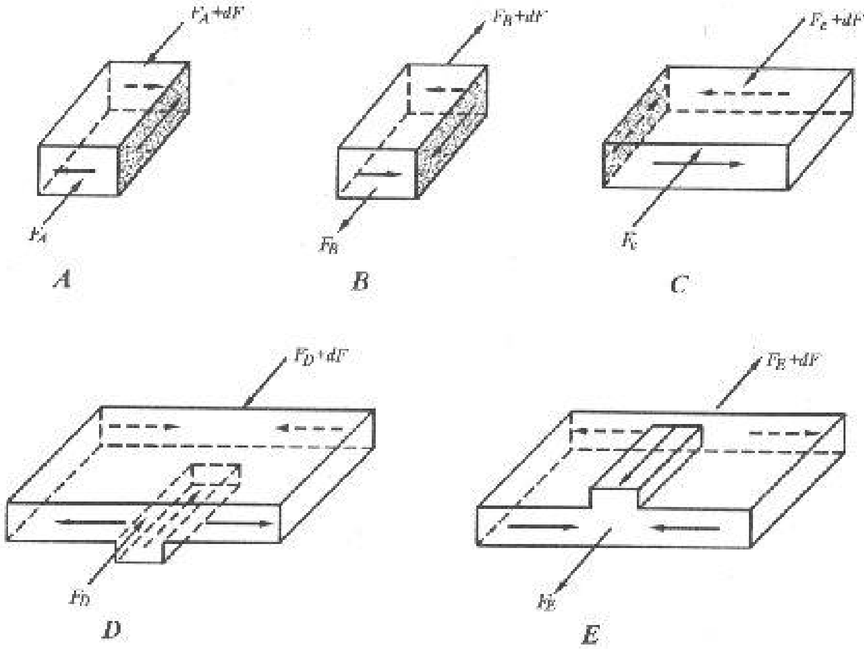
مسأله ۷-۳۶

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۰/۱۵)(۰/۲۴)^۳ - \frac{۱}{۱۲}(۰/۱۴)(۰/۲)^۳ = ۷/۹۵ \times ۱۰^{-۵} m^۴$$

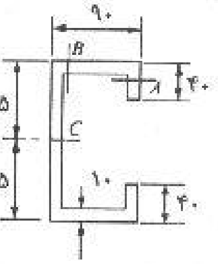
$$q_A = q_B = \frac{VQ}{I} = \frac{۱۰۰(kN) \times (۰/۰۳ \times ۰/۰۲)(۰/۱۱)}{۷/۹۵ \times ۱۰^{-۵}} = ۸۳\, kN/m$$

$$q_c = \frac{۱۰۰ \times (۰/۰۷ \times ۰/۰۲)(۰/۱۱)}{۷/۹۵ \times ۱۰^{-۵}} = ۱۹۴\, kN/m$$

$$q_D = q_E = \frac{۱۰۰ \times (۰/۱۵ \times ۰/۰۲)(۰/۱۱)}{۷/۹۵ \times ۱۰^{-۵}} = ۴۱۵\, kN/m$$



۷-۳۷. تیری با مقطع نشان داده شده در شکل، نیروی برشی قائمی مساوی ۳۰ کیلو نیوتن را که بر مرکز برش آن وارد می‌شود، انتقال می‌دهد. مطلوب است تعیین تنشهای برشی در مقاطع A، B و C لنگر ماند در حول محور خنثی مساوی $10^6 \times 12.2$ میلیمتر به توان ۴ و ضخامت مقطع در تمام نقاط ثابت و مساوی ۱۰ میلیمتر می‌باشد.



(تمام ابعاد بر حسب میلی‌متر)

مسأله ۷-۳۷

$$Q_A = (30 \times 10)\left(75 - 10 - \frac{30}{2}\right) \rightarrow Q_A = 15000\ mm^3$$

$$\tau_A = \frac{VQ_A}{It} = \frac{(30 \times 10^3)(15000)}{(12.2 \times 10^6)(10)} = 3.7\ N/mm^2$$

$$Q_B = Q_A + (80 \times 10)(75 - 5) = 71000\ mm^3$$

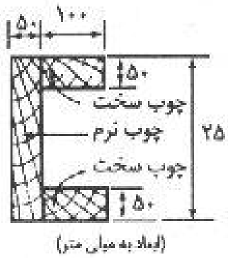
$$\tau_B = \frac{VQ_B}{It} = \frac{(30 \times 10^3)(71000)}{(12.2 \times 10^6)(10)} = 17.46\ N/mm^2$$

$$Q_C = Q_B + (75 \times 10)\left(\frac{75}{2}\right) = 99125\ mm^3$$

$$\tau_C = \frac{VQ_c}{It} = \frac{(30 \times 10^3)(99125)}{(12.2 \times 10^6)(10)} = 24.37\ N/mm^2$$

۷-۳۸. مطابق شکل، مقطع یک تیر طره‌ای به دهانه ۱/۲ متر، از به هم چسباندن سه قطعه تخته، ساخته شده است. یک نیروی متمرکز به طرف بالایی مساوی ۴۰۰۰ نیوتن قرار است که بر این تیر طوری وارد گردد که هیچ گونه لنگر پیچشی تولید نکند، محل تأثیر این نیرو، کجا باید باشد؟

فرض کنید که تخته‌ها را بتوان نازک فرض کرد. ضریب ارتجاعی چوب سخت‌تر مساوی $۰/۱ \times ۱۰^{۵}$ و ضریب ارتجاعی چوب نرمتر مساوی $۰/۰۷ \times ۱۰^{۵}$ نیوتن بر میلیمتر مربع می‌باشد. (راهنمایی: مقطع را به یک مقطع معادل که از یک ماده ساخته شده، تبدیل نمایید).



مسأله ۷-۳۸

$$n = \frac{۰/۱}{۰/۰۷} = \frac{۱۰}{۷}$$

$$\text{عرض معادل چوب سخت} = nb = \frac{۱۰}{۷} \times ۱۰۰ = ۱۴۳mm$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۱۹۳)(۲۵۰)^{۳} - \frac{۱}{۱۲}(۱۴۳)(۱۵۰)^{۳} = ۲۱۱ \times ۱۰^{۶} mm^{۴}$$

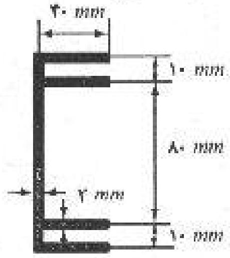
همانگونه که در بحث مرکز برش ملاحظه نمودید، رابطه مرکز برش برای این نوع مقطع به شکل زیر می‌باشد:

$$e = \frac{b^{۲}h^{۲}t}{۴I} = \frac{(۱۵۰)^{۲}(۲۵۰)^{۲}(۵۰)}{۴(۲۱۱ \times ۱۰^{۶})} = ۸۳/۳mm$$

$$۸۳/۳ - ۲۵ = ۶۰/۳$$

یعنی نیرو باید در فاصلهٔ $۶۰/۳mm$ از لبهٔ سمت چپ مقطع اثر کند.

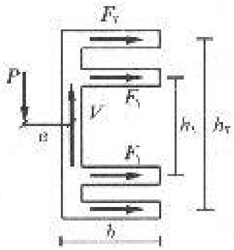
۷-۳۹. مطلوب است تعیین مرکز برش برای مقطع نشان داده شده.



مسأله ۷-۳۹

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۲)(۱۰۰)^{۳} + ۲(۲ \times ۴۰)(۴۰)^{۲} + ۲ \times (۲ \times ۴۰)(۵۰)^{۲} = ۸/۲۳ \times ۱۰^{۵} mm^{۴}$$

از جمله $۴ \times \frac{۱}{۱۲}(۴۰)(۲)^{۳}$ به خاطر ناچیز بودن در مقایسه با سایر جمله‌ها صرفنظر شده است.



$$P.e = h_۱F_۱ + h_۲F_۲ \quad , \quad P = V$$

$$F_۱ = \frac{۱}{۲}\tau_۱ A_۱ = \frac{VQ_۱}{۲It}A_۱ = \frac{VA_۱\bar{y}_۱}{۲It}A_۱$$

به همین ترتیب:

$$F_۲ = \frac{VA_۲\bar{y}_۲}{۲It}A_۲$$

$$A_1 = tb = A_2$$

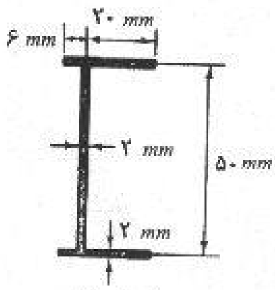
$$\bar{y}_1 = \frac{h_1}{2}\ ,\quad \bar{y}_2 = \frac{h_2}{2}$$

از ترکیب روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$e = \frac{tb^2}{4I}(h_1^2 + h_2^2) \qquad e = \frac{2(40)^2}{4\,(8.23 \times 10^5)}(80^2 + 100^2) = 15.9\,mm$$

۷-۴۰. مطلوب است تعیین مرکز برش برای مقطع نشان داده شده.

$$I = \frac{1}{12}(2)(50)^3 + 2 \times (2 \times 26)(25)^2 = 8.58 \times 10^4\,mm^4$$



مسأله ۷-۴۰

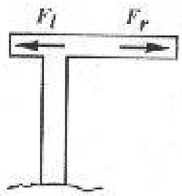
$$P.e = F_r h_r - F_l h_l \quad (1)\ ,\ h_r = h_l = 50\,mm\ ,\quad P = V$$

$$F_r = \frac{VA_r\bar{y}_1}{2It}A_r \qquad F_l = \frac{VA_l\bar{y}_2}{2It}A_l$$

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = 25mm$$

$$F_r = \frac{V(2 \times 20)^2(25)}{2\,(8.58 \times 10^4)(2)} = 11.655 \times 10^{-2} \times V$$

$$F_l = \frac{V(2 \times 6)^2(25)}{2\,(8.58 \times 10^4)(2)} = 1.049 \times 10^{-2} \times V$$

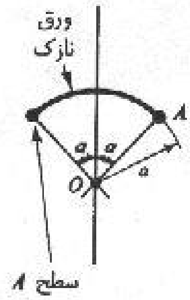


$$(1) \rightarrow e = \frac{11.655 \times 10^{-2}V \times 50 - 1.049 \times 10^{-2}V \times 50}{V}$$

$$\rightarrow e = 5.3mm$$

۷-۴۱. مطلوب است تعیین مرکز برش برای مقطع نشان داده شده. فرض کنید که سطح مقطع ورق، در مقایسه با سطوح A ناچیز است.

$$I = 0 + Ad^2 = 2A\,(a\,Sin\,\alpha)^2$$

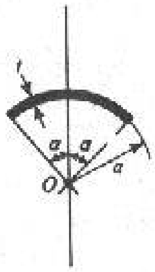


مسأله ۷-۴۱

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{VA\ (a\,Sin\,\alpha)}{2A\ (a\,Sin\,\alpha)^2} = \frac{V}{2a\,Sin\,\alpha}$$

$$P.e = Ve = \frac{2\pi a(2\alpha)}{2\pi}aq = \frac{V\alpha a}{Sin\,\alpha} \quad \Rightarrow e = \frac{\alpha}{Sin\,\alpha}\,a$$

۷-۴۲. مطلوب است تعیین مرکز برش برای مقطع نشان داده شده.



مسأله ۷-۴۲

$$I = \int y^{۲} dA = ۲\int_{۰}^{\alpha} (a\,Sin\theta)^{۲}\; a\,d\theta\,t = t\,a^{۳}\;(\alpha - sin\alpha\; cos\alpha)$$

$$Q = \int_{\theta_{۱}}^{\alpha} y\,dA = \int_{\theta_{۱}}^{\alpha} (a\,Sin\theta)\;a\,d\theta\,t = a^{۲}t\;(cos\,\theta_{۱} - cos\alpha)$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{V}{I}\,a^{۲}t\;(Cos\,\theta_{۱} - Cos\alpha)$$

$$P.e = V.e = ۲\int_{۰}^{\alpha} \left(\frac{q}{t}\right)\;(a\,d\theta\,t)\;a = \frac{۲Va^{۳}t}{I}\int_{۰}^{\alpha} (Cos\,\theta - Cos\alpha)\;d\theta$$

$$\Rightarrow\; Ve = \frac{۲Va^{۳}t}{I}\;(Sin\alpha - \alpha\,Cos\alpha)$$

$$\Rightarrow\; e = \frac{۲a(Sin\alpha - \alpha\,Cos\alpha)}{\alpha - Sin\alpha\,Cos\alpha}$$ (از نقطهٔ O)

مسائل فصل هشتم

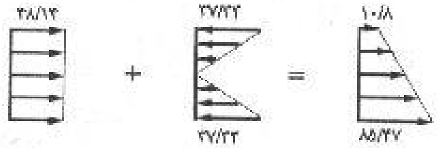
۸-۱. یک تیر ساده از نیمرخ IPE ۳۶۰ به‌طور همزمان تحت تأثیر بار گستردهٔ یکنواختی به میزان ۳۰ کیلو نیوتن بر متر (که شامل وزن تیر نیز می‌شود) و نیروی کششی معادل ۳۵۰ کیلونیوتن قرار دارد. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم اگر دهانهٔ تیر ۳ متر باشد.

$$M_{max} = \frac{۱}{۸} = wL^۲ = \frac{۱}{۸}\,(۳۰)\,(۳)^۲ = ۳۳/۷۵\,kN.m$$

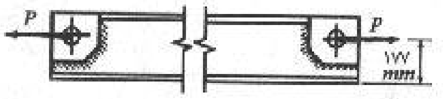
از جدول ۴ ضمیمه برای IPE ۳۶۰ : $A = ۷۲/۷\,cm^۲,\ \left(S = \frac{c}{I}\right)\ ,\ S = ۹۰۴\ cm^۳$

کششی $\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M}{S} = \frac{۳۵۰ \times ۱۰^۳}{۷۲۷۰} + \frac{۳۳۷۵۰ \times ۱۰^۲}{۹۰۴ \times ۱۰^۲} = ۴۸/۱۴ + ۳۷/۳۳ = ۸۵/۷۴\,MPa$

$\sigma_{min} = ۴۸/۱۴ - ۳۷/۳۳ = ۱۰/۸\,MPa$ کششی



۸-۲. یک تیرآهن IPE ۲۷۰ همانند شکل زیر تحت تأثیر نیروی کششی خارج از مرکز P مساوی ۵۰۰ کیلونیوتن قرار دارد. مطلوب است تعیین حداکثر تنشهای به وجود آمده در بالهای نیمرخ در وسط تیر.



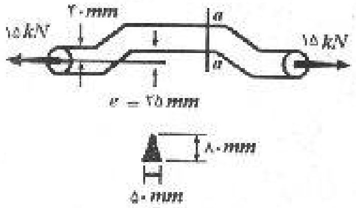
مسألهٔ ۸-۲

با استفاده از جدول ۴ ضمیمه برای IPE ۲۷۰ :

$A = ۴۵/۹\ cm^۲\quad ,\quad S = ۴۲۹\ cm^۳,\quad h = ۲۷۰\ mm$

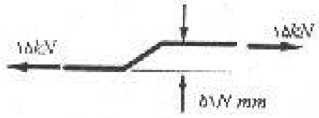
$$M = P.\,e = ۵۰۰ \times \left(۱۷۷ - \frac{h}{۲}\right) = ۲۱۰۰۰\ kN\,.\,m$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M}{S} = \frac{۵۰۰ \times ۱۰^۳}{۴۵۹۰} + \frac{۲۱ \times ۱۰^۶}{۴۲۹ \times ۱۰^۳} = ۱۵۷/۹\ MPa$$



مسألهٔ ۸-۳

۸-۳. یک قطعه از ماشین که از آن برای انتقال نیروی کششی ۱۵ کیلونیوتنی استفاده می‌شود، در شکل نشان داده شده است. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم به وجود آمده در ناحیهٔ خارج از محور قطعه.



$$e = ۲۵ + \frac{۸۰}{۳} = ۵۱/۷\ mm$$

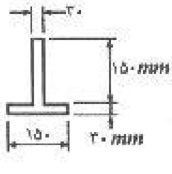
$$M = ۱۵۰۰۰ \times ۰/۰۵۱۷ = ۷۷۵/۵\ N.m$$

$$I = \frac{۱}{۳۶}(۵۰)(۸۰)^{۳} = ۷/۱۱ \times ۱۰^{۵}\ mm$$

$$\sigma_{top} = \frac{P}{A} - \frac{MC}{I} = \frac{۱۵۰۰۰}{\frac{۱}{۲}(۵۰)(۸۰)} - \frac{۷۷۵/۵ \times ۱۰^{۳} \times \left(\frac{۲}{۳} \times ۸۰\right)}{۷/۱۱ \times ۱۰^{۵}} = ۷/۵ - ۵۸/۱۷ = -۵۰/۷\ MPa$$

$$\sigma_{bottom} = \frac{۱۵۰۰۰}{\frac{۱}{۲}(۵۰)(۸۰)} + \frac{۷۷۵/۵ \times ۱۰^{۳} \times \left(\frac{۱}{۳} \times ۸۰\right)}{۷/۱۱ \times ۱۰^{۵}} = ۷/۵ + ۲۹/۱ = ۳۶/۶\ MPa$$

در نتیجه تنش ماکزیمم $۵۰/۷\ MPa$ از نوع فشاری بوده که در بالای مقطع ایجاد می‌شود.



مسأله ۸-۴

۸-۴. یک قطعه ماشین، مطابق قطعهٔ مسأله ۸-۳، منتهی با مقطع سپری که در شکل نشان داده شده، مفروض است. در انتهای این قطعه نیروی کششی P در فاصلهٔ ۹۰ میلی‌متری از سطح تحتانی بال تأثیر می‌کند و میزان خروج از مرکز e از خط تأثیر نیرو مساوی ۶۰ میلی‌متر می‌باشد. در صورتی که مقدار P مساوی ۱۷۵ کیلونیوتن و رفتار تیر در محدودهٔ ارتجاعی قرار داشته باشد، مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم به وجود آمده در قطعه.

$$\bar{y} = \frac{(۱۵۰ \times ۳۰)(۱۵) + (۱۵۰ \times ۳۰)(۱۰۵)}{۲ \times (۱۵۰ \times ۳۰)} = ۶۰ mm \text{ از پایین}$$

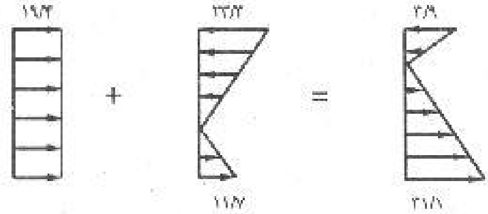
$$I = \frac{۱}{۱۲}(۱۵۰)(۳۰)^{۳} + (۱۵۰ \times ۳۰)(۴۵)^{۲} + \frac{۱}{۱۲}(۳۰)(۱۵۰)^{۳} + (۳۰ \times ۱۵۰)(۱۰۵-۶۰)^{۲}$$

$$\Rightarrow I = ۲۷ \times ۱۰^{۶}\ mm^{۴}$$

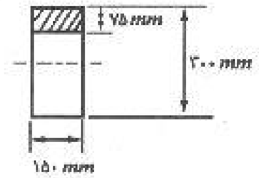
$$M = P \times e = ۱۷۵۰۰۰ \times (۹۰ - ۶۰) = ۵/۲۵ \times ۱۰^{۶}\ N.mm$$

$$\sigma_{top} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{۱۷۵ \times ۱۰^{۳}}{۲ \times ۱۵۰ \times ۳۰} - \frac{(۵/۲۵ \times ۱۰^{۶})(۱۲۰)}{۲۷ \times ۱۰^{۶}} = ۱۹/۴ - ۲۳/۳ = -۳/۹\ MPa$$

$$\sigma_{bottom} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{۱۷۵ \times ۱۰^{۳}}{۲ \times ۱۵۰ \times ۳۰} + \frac{(۵/۲۵ \times ۱۰^{۶})(۶۰)}{۲۷ \times ۱۰^{۶}} = ۱۹/۴ + ۱۱/۷ = ۳۱/۱\ MPa$$



۸-۵. تیری با مقطع نشان داده شده در شکل مفروض است. اگر در یک مقطع مشخص، این تیر تحت تأثیر لنگر خمشی ۲۰ + کیلونیوتن‌متر، نیروی برشی قائم ۲۰ + کیلونیوتن و نیروی کششی ۳۰ کیلونیوتن قرار داشته باشد، مطلوب است تعیین برآیند نیروهای قائم مؤثر بر قسمت سایه خورده مقطع.



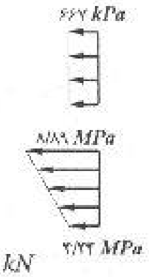
مسأله ۸-۵

$$\sigma_{axial} = \frac{P}{A} = \frac{۳۰}{(۰/۱۵)(۰/۳۰)} = ۶۶۷\ kN/m^{۲}$$

$$\sigma_{flex(max)} = \frac{Mc}{I} = \frac{۲۰ \times ۰/۱۵}{\frac{۱}{۱۲}(۰/۱۵)(۰/۳)^{۳}} = ۸۸۹۰\ kN/m^{۲}$$

حال تنش ناشی از خمش در پایین ناحیه سایه خورده را بدست می‌آوریم:

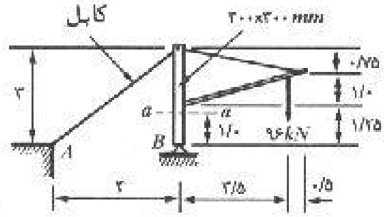
$$\sigma_{flex(low)} = \frac{My}{I} = \frac{۲۰ \times ۰/۰۷۵}{\frac{۱}{۱۲}(۰/۱۵)(۰/۳)^{۳}} = ۴۴۴۴/۵\,kN/m^{۲}$$



$$\sigma_{flex(ave)} = \frac{۸۸۹۰ + ۴۴۴۴/۵}{۲} = ۶۶۶۷/۲\,kN/m^{۲}$$

$$F = [\sigma_{axial} + \sigma_{flex(ave)}] \cdot A_{*} = [۶۶۷ + ۶۶۶۷/۲] \times (۰/۰۷۵ \times ۰/۱۵) = ۸۲/۵\,kN$$

۸-۶. مطلوب است تعیین حداکثر تنش فشاری که به طور قائم بر مقطع $a-a$ از دکل شکل زیر تأثیر می‌کند.



مسأله ۸-۶

$$\circlearrowright + \sum M_B = ۰ : ۹۶ \times ۲/۵ - \frac{۴}{۵} T \times ۳ = ۰ \rightarrow T = ۱۴۰\ kN$$

$$\sum F_x = ۰ : B_x - \frac{۴}{۵} \times ۱۴۰ = ۰ \rightarrow B_x = ۱۱۲\,kN$$

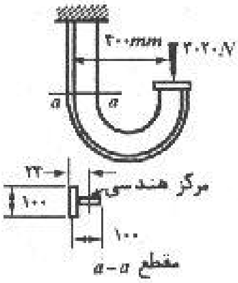
$$\sum F_y = ۰ : B_y - ۹۶ - \frac{۳}{۵} \times ۱۴۰ = ۰ \rightarrow B_y = ۱۸۰\ kN$$

$P_{aa} = ۱۸۰\ kN$ فشاری $\quad M_{aa} = ۱۱۲ \times ۱ = ۱۱۲\,kN.m$

$$S = \frac{۱}{۶} bh^{۲} = \frac{۱}{۶} \times (۳۰۰)(۳۰۰)^{۲} = ۴/۵ \times ۱۰^{۶}\ mm^{۳}$$

$$\sigma_{max}(\text{فشاری}) = -\frac{P}{A} - \frac{M}{S} = -\frac{۱۸۰ \times ۱۰^{۳}}{۳۰۰^{۲}} - \frac{۱۱۲ \times ۱۰^{۶}}{۴/۵ \times ۱۰^{۶}} = -۲۶/۸۹\,MPa$$

۸-۷. یک قلاب بزرگ که از نیمرخ سپری ساخته شده، همانند شکل بارگذاری شده است. مطلوب است تعیین بزرگترین تنش قائمی که در انتهای گیردار به وجود می‌آید. برای نیمرخ به کار رفته در این مسأله، ۹۵۵ = A میلی‌مترمربع و $I_D = ۰/۸۹ \times ۱۰^۶$ میلی‌متر به توان ۴ می‌باشد.



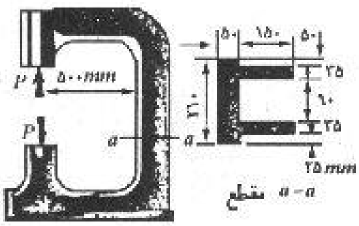
مسأله ۸-۷

$P = ۳۰۲۰\,N$

$M = ۳۰۲۰(۰/۴ - ۰/۰۲۴) = ۱۱۳۵/۵\,N.m$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{۳۰۲۰}{۹۵۵} + \frac{(۱۱۳۵/۵ \times ۱۰^۳)(۱۰۰ - ۲۴)}{۰/۸۹ \times ۱۰^۶} = ۱۰۰/۱\,N/mm^۲$$

۸-۸. قاب چدنی یک دستگاه پرس سوراخ کن، دارای مشخصات نشان داده شده در شکل می‌باشد. در صورتی که تنش مجاز کششی ۲۸ نیوتن بر میلی‌مترمربع و تنش مجاز فشاری ۸۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، مقدار نیرویی مانند P که توسط مقطع $a - a$ کنترل می‌شود، چقدر است.



مسأله ۸-۸

$$\bar{y} = \frac{(۲۱۰ \times ۵۰)(۲۵) + (۱۵۰ \times ۳۵)(۱۲۵) \times ۲}{(۲۱۰ \times ۵۰) + ۲(۱۵۰ \times ۳۵)} = ۷۵\,mm$$ از چپ

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۲۱۰)(۵۰)^۳ + (۲۱۰ \times ۵۰)(۵۰)^۲ + ۲\left[\frac{۱}{۱۲}(۳۵)(۱۵۰)^۳ + (۳۵ \times ۱۵۰)(۵۰)^۲\right] = ۷۴/۳۶ \times ۱۰^۶\,mm^۴$$

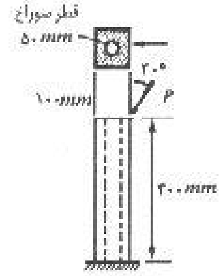
$M = (۵۰۰ + ۷۵)P = ۵۷۵P$

$A = ۲۱۰ \times ۵۰ + ۲(۱۵۰ \times ۳۵) = ۲۱۰۰۰\,mm^۲$

$$\sigma_t = ۲۸ = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P}{۲۱۰۰۰} + \frac{(۵۷۵P)(۷۵)}{(۷۴/۳۶ \times ۱۰^۶)} = ۶/۲۷۶ \times ۱۰^{-۴}P \Rightarrow P = ۴۴۶۱۷\,N$$

$$\sigma_r = ۸۰ = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{P}{۲۱۰۰۰} + \frac{(۵۷۵P)(۱۲۵)}{(۷۴/۳۶ \times ۱۰^۶)} = ۱/۰۱۴ \times ۱۰^{-۳}P \Rightarrow P = ۷۸۸۸۰\,N$$

پس $P = ۴۴۶۱۷\,N$



مسأله ۸-۹

۸-۹. میلهٔ کوتاهی با مقطع مربع به ابعاد ۱۰۰ میلی‌متر که داخل آن سوراخی به قطر ۵۰ میلی‌متر ایجاد شده، تحت تأثیر نیرویی همانند شکل می‌باشد. با صرف‌نظر کردن از وزن میله، مطلوب است تعیین نیروی P به نحوی که حداکثر تنش قائم در انتهای گیردار از ۱۴۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع تجاوز نکند.

$$P_x = P \, Sin \, ۳۰^\circ \qquad P_y = P \, Cos ۳۰^\circ$$

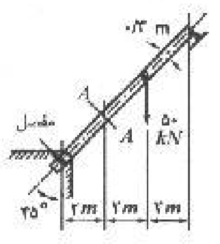
$$M = P \, Sin \, ۳۰^\circ \times (۰/۴) - P \, Cos ۳۰^\circ \, (۰/۰۵) = ۰/۱۵۷ P \;\; N.m$$

$$A = (۰/۱)^۲ - \frac{\pi}{۴}(۰/۰۵)^۲ = ۸/۰۴ \times ۱۰^{-۳} \;\; m^۲$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۰/۱)^۴ - \frac{\pi}{۴}(۰/۰۲۵)^۴ = ۸/۰۳ \times ۱۰^{-۶} \;\; m^۴$$

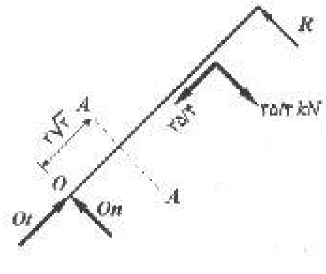
$$\sigma = ۱۴۰ \times ۱۰^۶ \; (N/m^۲) = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P \, Cos ۳۰}{۸/۰۴ \times ۱۰^{-۳}} + \frac{۰/۱۵۷ P \, (۰/۰۵)}{۸/۰۳ \times ۱۰^{-۶}}$$

$$۱۴۰ \times ۱۰^۶ = ۱۰۷/۷ P + ۹۷۷/۶ \, P \Rightarrow P = ۱۲۹ \, kN$$



مسأله ۸-۱۰

۸-۱۰. یک تیر شیب‌دار با مقطع ۰/۳ × ۰/۲ متر، بار متمرکز به طرف پائینی همانند شکل تحمل می‌کند. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم مؤثر بر مقطع $A - A$ از وزن تیر صرف‌نظر کنید و فرض نمایید که بارها و واکنشهای وارده هیچ گونه خروج از مرکزیتی ندارند.



$$\frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۵۰ = ۳۵/۴ \, kN$$

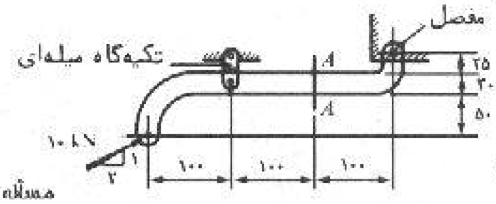
$$\sum M_o = ۰ : R = \frac{۲}{۳} \times ۳۵/۴ = ۲۳/۶ \, kN$$

$$\sum F_t = ۰ : O_t = ۳۵/۴ \, kN$$

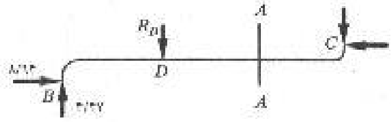
$$\sum F_n = ۰ : O_n = ۱۱/۸ \, kN$$

$$\sigma_{max} = -\frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = -\frac{۳۵/۴ \times ۱۰^{-۳}}{۰/۲ \times ۰/۳} - \frac{(۱۱/۸ \times ۲\sqrt{۲})(۰/۱۵)}{\frac{۱}{۱۲}(۰/۲)(۰/۳)^۳} = -۱۱/۷ \, MN/m^۲ \; (MPa)$$

۸-۱۱. یک قطعه ماشین با مقطعی به ابعاد ۱۰ × ۳۰ میلی‌متر، همانند شکل بارگذاری شده است. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم مؤثر بر مقطع $A - A$. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر می‌باشد.



مسئله ۸-۱۱



$$\sum M_c = ۰ : ۴/۴۷ \times ۳۰۰ - ۸/۹۴ \times ۱۰۵ = R_D \times ۲۰۰ \rightarrow R_D = ۲/۰۱\ kN$$

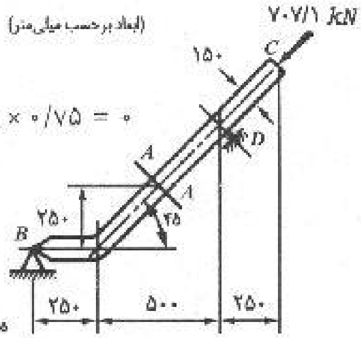
$$M_{AA} = ۴/۴۷ \times ۰/۲ - ۸/۹۴ \times ۰/۰۶۵ - ۲/۰۱ \times ۰/۱ = ۰/۱۱۲\ kN.m$$

$$\sigma_{max} = -\frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = -\frac{۸/۹۴ \times ۱۰^{-۳}}{(۰/۰۳ \times ۰/۰۱)} - \frac{(۰/۱۱۲ \times ۱۰^{-۳})(۰/۰۱۵)}{\frac{۱}{۱۲}(۰/۰۱) \times (۰/۰۳)^۳} = -۲۹/۸ - ۷۴/۷$$

$$= -۱۰۴/۵\ MPa$$ فشاری

$$\sigma = -\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = -۲۹/۸ + ۷۴/۷ = ۴۴/۹$$ کششی

۸-۱۲. در شکل زیر، مطلوب تعیین حداکثر تنش تائم بر مقطع $A - A$. عضو BC از میلهٔ فولادی به ابعاد ۱۵۰ × ۱۵۰ میلی‌متر ساخته شده است. از وزن میله صرف‌نظر کنید.



مسئله ۸-۱۲

$$C_x = C_y = \frac{۷۰۷/۱}{\sqrt{۲}} = ۵۰۰\ kN$$

$$\sum M_B = ۰ : ۵۰۰ \times ۱ - ۵۰۰ \times ۰/۷۵ - D_x \times ۰/۵ - D_y \times ۰/۷۵ = ۰$$

$$D_x = D_y$$

از حل معادلات فوق نتیجه می‌شود:

$$D_x = D_y = ۱۰۰\ kN$$

$$\sum F_x = ۰ : B_x = ۶۰۰\ kN$$

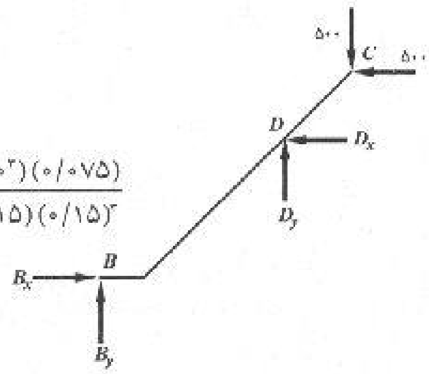
$$\sum F_y = ۰ : B_y = ۴۰۰\ kN$$

$$P = ۶۰۰ \frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۴۰۰ \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۷۰۷/۱\ kN,$$

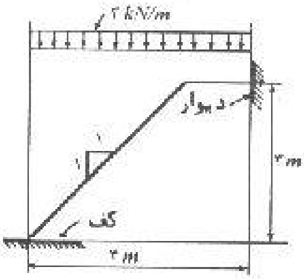
$$M = ۴۰۰ \times ۰/۵ - ۶۰۰ \times ۰/۲۵ = ۵۰\ kN.m$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{-۷۰۷/۱ \times ۱۰^۳}{(۰/۱۵ \times ۰/۱۵)} - \frac{(۵۰ \times ۱۰^۳)(۰/۰۷۵)}{\frac{۱}{۱۲}(۰/۱۵)(۰/۱۵)^۳}$$

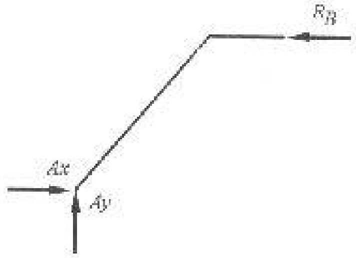
$$= -۱۲۰/۳\ MPa$$



۸-۱۳. ابعاد پلهٔ یک کارخانه، مطابق شکل می‌باشد. دو تیر کناری این پله از ناودانی ۲۴۰ می‌باشند. اگر بار وارد بر یک ناودانی مطابق شکل باشد، مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم در مقطعی در ۱/۵ متری بالای کف. اتصال پله به کف را مفصلی فرض نمایید و هم چنین فرض کنید که دیوار فقط قادر است واکنش افقی ایجاد کند.



مسأله ۸-۱۳



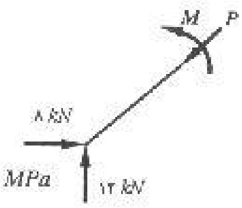
$$\sum M_A = 0 : R_B \times 3 - (3 \times 4)(2) = 0 \Rightarrow R_B = 8\,kN$$

$$\sum F_x = 0 : A_x = 8\,kN$$

$$\sum F_y = 0 : A_y = 3 \times 4 = 12\,kN$$

$$M_{aa} = \left(12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1.5\sqrt{2}) - (3 \times 1.5)\ \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{(1.5\sqrt{2})}{2} = 2.625\,kN.m$$

$$P = 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \times 1.5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P = 10.96\,kN$$



$$\sigma_m = -\frac{P}{A} - \frac{M}{S} = -\frac{10.96 \times 10^3}{4230} - \frac{2.625 \times 10^6}{300 \times 10^3} = -11.34\,MPa$$

۸-۱۴. مسأله ۸-۱۳ را با فرض اینکه تکیه‌گاه فوقانی مفصلی و تکیه‌گاه تحتانی فقط واکنش قائم می‌تواند انتقال دهد، مجدداً حل نمایید.

$$\sum M_B = 0 : 4V_A - (3 \times 4) \times 2 = 0 \Rightarrow V_A = 6\,kN \uparrow$$

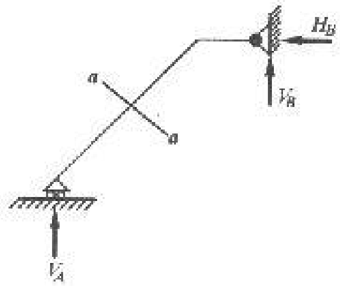
$$\sum F_y = 0 : V_B = 3 \times 4 - 6 = 6\,kN \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 : H_B = 0$$

$$M_{aa} = 6 \times 1.5 - (3 \times 1.5) \times (0.75) = 5.63\,kN.m$$

$$P_{aa} = \frac{1}{\sqrt{2}}(6 - 3 \times 1.5) = 1\,kN$$

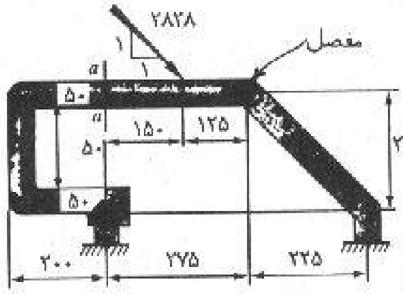
$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M}{S}$$



از جدول ۸ ضمیمه برای ناودانی ۲۴۰ : $A = 42.3\,cm^2$ و $S = 300\,cm^3$

$$\sigma_{max} = \frac{-1000}{4230} - \frac{5630 \times 10^3}{300 \times 10^3} = -19\,MPa$$

۸-۱۵. مطلوب است تعیین حداکثر تنش فشاری در مقطع $a-a$ از سازهٔ نشان داده شده در شکل زیر. مقطع $a-a$ به شکل دایره به قطر ۵۰ میلی‌متر می‌باشد.

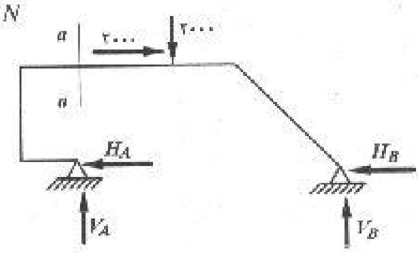


مسئله ۸-۱۵

$F_x = F_y = \frac{۲۸۲۸}{\sqrt{۲}} = ۲۰۰۰\,N$

$\sum M_A = ۰ : V_B \times ۵۰۰ - ۲۰۰۰ \times ۱۵۰ - ۲۰۰۰ \times (۲۲۵ + ۲۵) = ۰$

$\rightarrow V_B = ۱۶۰۰\,N \qquad H_B = V_B = ۱۶۰۰\,N$



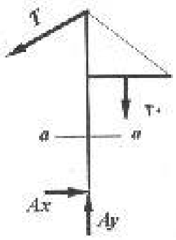
$\sum F_x = ۰ : H_A = ۲۰۰۰ - ۱۶۰۰ = ۴۰۰\,N$

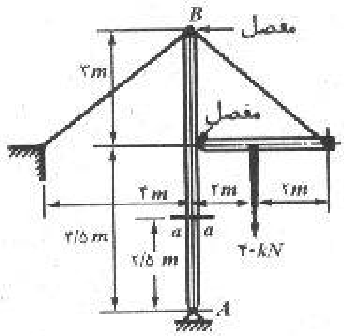
$P_{a-a} = ۴۰۰\,N$

$M_{a-a} = ۴۰۰ \times ۰/۲۲۵ = ۹۰\,N.m$

$\sigma_{max}(\text{فشاری}) = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{۴۰۰}{\frac{\pi}{۴}(۰/۰۵)^۲} - \frac{(۹۰)\times(۰/۰۲۵)}{\frac{\pi}{۴}(۰/۰۲۵)^۴} = -۷/۱\,MPa$

۸-۱۶. مطلوب است تعیین حداکثر تنش کششی قائم مؤثر بر مقطع $a-a$ از شکل زیر. مقطع دکل به صورت دایره به قطر ۰/۳ متر می‌باشد.





مسئله ۸-۱۷

$\sum M_A = ۰ : \frac{۴}{۵} \times ۷/۵ = ۴۰ \times ۲ \Rightarrow T = ۱۳/۳\,kN$

$\sum F_y = ۰ \quad : A_y = \frac{۳}{۵} T + ۴۰ = ۴۸\,kN$

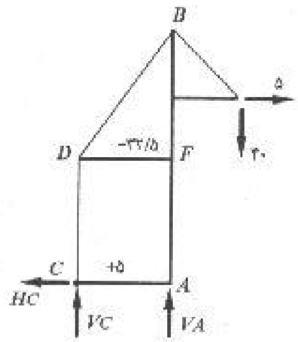
$\sum F_x = ۰ \quad : A_x = \frac{۴}{۵} T = ۱۰/۶۷$

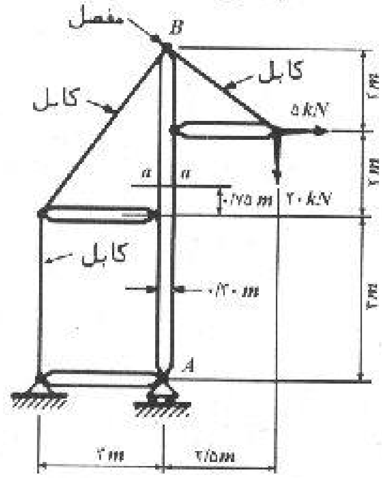
$P_{aa} = ۴۸ kN \qquad\qquad M_{aa} = ۱۰/۶۷ \times ۲/۵ = ۲۶/۷\ kN.m$

$$\sigma_{max} = -\frac{P}{A} \pm \frac{MC}{I} = -\frac{۴۸۰۰۰}{\frac{\pi}{۴}(۰/۳)^۲} \pm \frac{۲۶۷۰۰ \times (۰/۱۵)}{\frac{\pi}{۴}(۰/۱۵)^۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\text{کششی})\ \sigma_{max} = ۹/۴\ MPa \\ (\text{فشاری})\ \sigma_{max} = -۱۰/۷۵\ MPa \end{cases}$$

۱۷-۸. مطلوب است تعیین حداکثر تنش فشاری قائم مؤثر بر مقطع $a - a$ از سازهٔ زیر. دکل AB دارای مقطع مربع به ابعاد ۳۰۰ × ۳۰۰ میلی‌متر می‌باشد. از وزن سازه صرف‌نظر کنید.





مسئله ۱۷-۸

$\sum M_c = ۰ : V_A \times ۳ = ۴۰ \times ۵/۵ + ۵ \times ۶$

$V_A = ۸۳/۳۳ kN$

$\sum F_y = ۰ : V_c = ۸۳/۳۳ - ۴۰ = ۴۳/۳۳ kN$

$\sum F_x = ۰ : H_c = ۵ kN$

با بکارگیری معادلات تعادل برای نقاط C و D داریم:

$F_{CA} = ۵\ kN$ و $F_{CD} = ۴۳/۳۳ kN$

$\frac{۴}{۵} F_{DB} = ۴۳/۳۳ \Rightarrow F_{DB} = ۵۴/۱۶ kN$

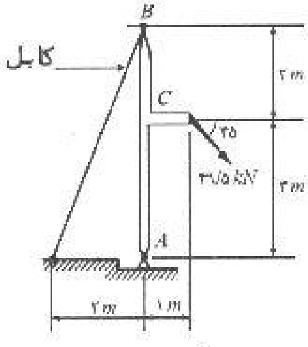
$F_{DF} = \frac{۳}{۵} F_{DB} = ۳۲/۵ kN$ فشاری

$\sum F_y = ۰ : P = ۸۳/۳۳ kN$

$\sum F_x = ۰ : H = ۳۲/۵ - ۵ = ۲۷/۵ kN$

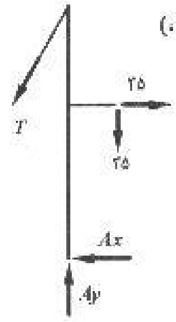
$M - ۳۲/۵ \times ۰/۷۵ + ۵ \times ۴/۷۵ = ۰ \Rightarrow M = ۰/۶۲۵ kNm$

$$\sigma_{max}\ (\text{فشاری}) = \frac{-۸۸۳۳۰}{(۰/۳ \times ۰/۳)} - \frac{۶۲۵ \times ۰/۳}{\frac{۱}{۱۲}(۰/۳)^۴} = -۱/۲۶\ MPa$$



مسأله ۸-۱۸

۸-۱۸. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم موجود در مقطع بحرانی عضو AB از سازهٔ زیر. عضو AB از نیمرخ IPE ۲۰۰ ساخته شده و گره C کاملاً گیردار است. (راهنمایی: برای تعیین مقطع بحرانی ابتدا لازم است که ترسیمهٔ تغییرات نیروی فشاری، و لنگر خمشی عضو AB رسم گردد.)



$$۴۹/۵ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۳۵\,kN$$

$$\sum M_A = ۰ : ۳۵ \times ۳ + ۳۵ \times ۱ - \frac{۲}{\sqrt{۵^۲ + ۲^۲}} T \times ۵ = ۰$$

$$\rightarrow \quad T = ۷۵/۴\ kN$$

$$\sum F_y = ۰ : A_y = ۳۵ + \frac{۵}{\sqrt{۲۹}} \times ۷۵/۴ = ۱۰۵\,kN$$

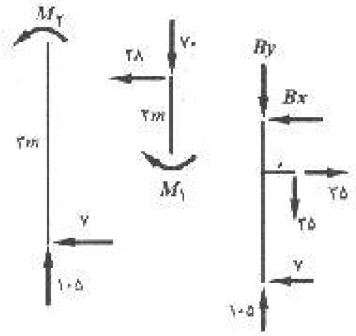
$$\sum F_x = ۰ : A_x + \frac{۲}{\sqrt{۲۹}} \times ۷۵/۴ - ۳۵ = ۰ \rightarrow A_x = ۷\,kN$$

$$\sum F_x = ۰ : B_x = ۳۵ - ۷ = ۲۸\,kN$$

$$\sum F_y = ۰ : B_y = ۱۰۵ - ۳۵ = ۷۰\ kN$$

$P_۱ = -۷۰\,kN$ و $M_۱ = ۲۸ \times ۲ = ۵۶\,kN.m$

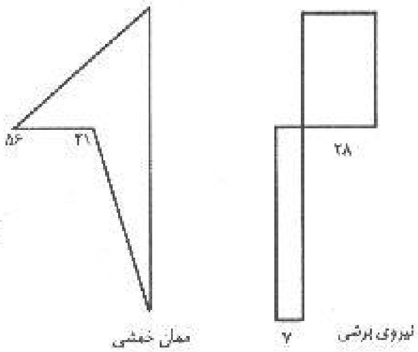
$P_۲ = -۱۰۵\ kN$ و $M_۲ = ۷ \times ۳ = ۲۱\,kN.m$



$$\sigma_{۱max} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{-۷۰۰۰۰}{۲۸۵۰} - \frac{۵۶ \times ۱۰^۶}{۱۹۴ \times ۱۰^۳}$$

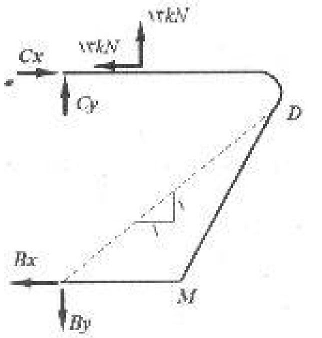
$$= -۳۱۳/۲\,MPa$$

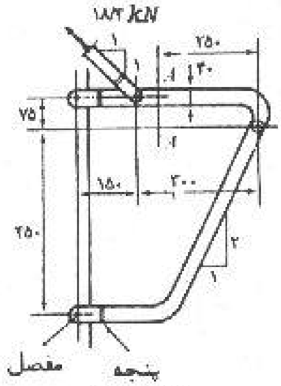
$$\sigma_{۲\,max} = \frac{-۱۰۵}{۲۸۵۰} - \frac{۲۱ \times ۱۰^۶}{۱۹۴ \times ۱۰^۳} = -۱۰۸/۳\,MPa$$



مقادیر A و S برای نیمرخ IPE ۲۰۰ از جدول ۴ استخراج شده‌اند.

۸-۱۹. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم موجود در مقطع $A-A$ از سازهٔ زیر. سطح مقطع $A-A$ به شکل مستطیل و به ابعاد ۳۰ × ۴۰ میلی‌متر می‌باشد. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل برحسب میلی‌متر می‌باشند.





مسأله ۸-۱۹

$$F_x = F_y = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۱۸/۴ = ۱۳\ kN$$

$$\sum M_c = ۰ : B_x \times (۴۵۰ + ۷۵) = ۱۳ \times ۱۵۰ \rightarrow B_x = ۳/۷۱\ kN$$

چون عضو BMD یک عضو دو نیرویی است، راستای نیروی وارد بر آن در امتداد BD می‌باشد که با توجه به هندسه شکل دارای شیب واحد است. بنابراین:

$$B_y = B_x = ۳/۷۱\ kN$$

$$\sum F_x = ۰ : C_x - ۱۳ - ۳/۷۱ = ۰ \rightarrow C_x = ۱۶/۷۱\ kN$$

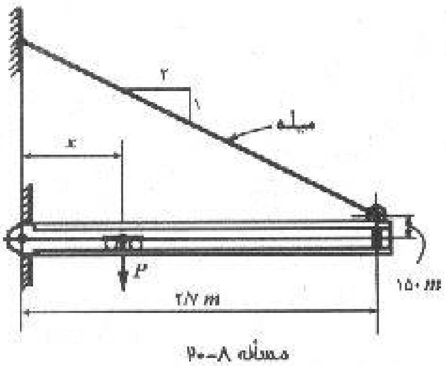
$$\sum F_y = ۰ : C_y + ۱۳ - ۳/۷۱ = ۰ \rightarrow C_y = ۹/۲۹\ kN$$

$$P_{AA} = -۱۶/۷۱ + ۱۳ = -۳/۷۱\ kN$$

$$M_{AA} = ۹/۲۹ \times (۰/۲) - ۱۳\ (۰/۰۵) = ۱/۲۱\ kN.m$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{-۳۷۱۰(N)}{(۰/۰۴ \times ۰/۰۳)\ (m^۲)} - \frac{(۱۲۱۰)(۰/۰۲)}{\frac{۱}{۱۲}(۰/۰۳)(۰/۰۴)^۳} = -۱۵۴\ MPa$$

۸-۲۰. جرثقیل نشان داده شده در شکل از تیمرخ معمولی I و میله‌ای از فولاد اعلا ساخته شده است. (الف) مطلوب است تعیین محل نیروی متحرک p به طوری که حداکثر لنگر خمشی در تیر ایجاد گردد. از وزن تیر صرف‌نظر کنید. (ب) با استفاده از محل به دست آمده از قسمت الف، مقدار P چقدر می‌تواند باشد. فرض کنید که اثر برش در روی تیر ناچیز است و تنش مجاز قائم در تیر را مساوی ۱۲۱ مگاپاسگال (نیوتن بر میلی‌متر مربع) در نظر بگیرید. در روی دقت معیار برقرار شده در قسمت الف، بحث کنید.



مسأله ۸-۲۰

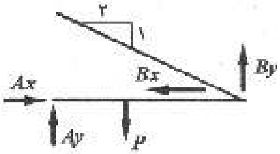
مشخصات نیمرخ I مصرفی بشرح زیر است:

$A = ۳۴۸۴\,mm^۲$ $\qquad I_x = ۲۴ \times ۱۰^۶\,mm^۴ \qquad I/c = ۲۳۶ \times ۱۰^۳\,mm^۳$

الف)

$$\sum M_A = ۰ : B_y \times ۲/۷ + B_x \times ۰/۱۵ - P.x = ۰$$

از طرفی با توجه به هندسه شکل $B_x = ۲B_y$ در نتیجه



$$P.x = ۲/۷B_y + ۰/۳B_y = ۳B_y \to B_y = \frac{۱}{۳}P.x$$

$$B_x = ۲B_y = \frac{۲}{۳}P.x$$

$$\sum F_y = ۰ : A_y + B_y = P \to A_y = P - B_y = P\left(۱ - \frac{x}{۳}\right) \quad (۱)$$

$$M = A_y.x = P\left(۱ - \frac{x}{۳}\right).x = P.x - \frac{P}{۳}x^۲$$

$$dM/dx = ۰ \to P - \frac{۲}{۳}P.x = ۰ \to x = \frac{۳}{۲} = ۱/۵m$$

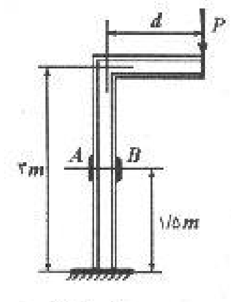
ب)

$$\sum F_x = ۰ : A_x = B_x = \frac{۲}{۳}P.x = \frac{۲}{۳}P \times \frac{۳}{۲} = P$$

$$(۱) \to A_y = P\left(۱ - \frac{۱/۵}{۳}\right) = \frac{P}{۲}$$

$$\sigma_{all} = -\frac{A_x}{A} - \frac{A_y.x}{S} = \frac{-P}{۳۴۸۴} - \frac{\frac{P}{۲} \times ۱۵۰۰}{۲۳۶ \times ۱۰^۳} = ۱۲۱ \to P = ۳۴/۹\,kN$$

۸-۲۱. قاب نشان داده شده در شکل از نیمرخ IPE ۲۲۰ ساخته شده است. در فاصلهٔ ۱/۵ متر از سطح زمین، مقدار کرنش در نقطهٔ A واقع در سطح خارجی بال مساوی $۱۰^{-۶} \times ۲۰۰$ میلی‌متر بر میلی‌متر و در نقطهٔ B واقع در سطح خارجی بال مساوی $۱۰^{-۶} \times ۶۰۰-$ میلی‌متر بر میلی‌متر اندازه‌گیری شده است. مقدار نیروی P و فاصلهٔ d چقدر است؟ ضریب ارتجاعی را مساوی $۱۰^۵ \times ۲$ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.



مسأله ۸-۲۱

$$\varepsilon_A = \frac{\sigma_A}{E} = \frac{۱}{E}\left(\frac{-P}{A} + \frac{Pd}{S}\right)$$

$$\varepsilon_B = \frac{\sigma_B}{E} = \frac{۱}{E}\left(\frac{-P}{A} - \frac{Pd}{S}\right)$$

از جدول ۴ ضمیمه مقادیر A و S بدست می‌آیند: $A = ۳۳/۴\,cm^۲$ و $S = ۲۵۲\,cm^۳$

$$200 \times 10^{-6} = \frac{1}{2 \times 10^{5}} \left(\frac{-P}{3340} + \frac{Pd}{252000} \right)$$

$$-600 \times 10^{-6} = \frac{1}{2 \times 10^{5}} \left(\frac{-P}{3340} - \frac{Pd}{252000} \right)$$

با جمع کردن طرفین در رابطه اخیر داریم:

$$-400 \times 10^{-6} = \frac{-2P}{(2 \times 10^{5})(3340)} \Rightarrow P = 133.6 \times 10^{3} N$$

با قرار دادن مقدار بدست آمده برای P در یکی از روابط مقدار d بدست می‌آید: $d = 150.9\,mm$

۸-۲۲. مطابق شکل، میله‌ای به ابعاد ۰/۱ × ۰/۱ متر، تحت تأثیر نیروی F قرار دارد تنشهای طولی در دو مقطع به فاصلهٔ ۰/۲ متر از یکدیگر با استفاده از روشهای تجربی به صورت زیر اندازه‌گیری شده‌اند:

$$\sigma_A = 0\ MPa, \quad \sigma_B = -30\ MPa, \quad \sigma_C = -24\ MPa, \quad \sigma_D = -6\ MPa$$

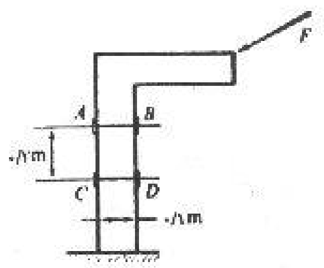
مطلوب است تعیین مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی F.

$$\sigma_A = \frac{-F_y}{A} + \frac{M_{AB}}{S} = 0 \qquad (1)$$

$$\sigma_B = -\frac{F_y}{A} - \frac{M_{AB}}{S} = -30 \times 10^{6} \quad (2)$$

$$\sigma_A - \sigma_B = \frac{2M_{AB}}{S} = 30 \times 10^{6} \qquad (3)$$

$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}(0.1)(0.1)^{3}}{0.05} = 1.67 \times 10^{-4}\ m^{3}$$



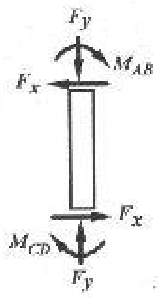
مسئله ۸-۲۲

با قرار دادن مقدار S در رابطه (۳) مقدار M_{AB} بدست می‌آید:

$$M_{AB} = 2500\ N.m$$

با استفاده از رابطه (۱) مقدار F_y حاصل می‌شود:

$$F_y = \frac{M_{AB}}{S} \times A = 149.7\ kN$$



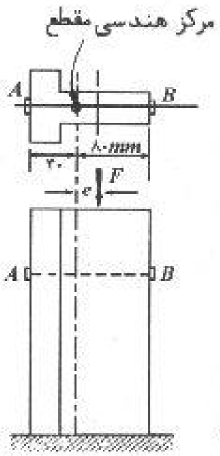
$$\sigma_c = \frac{-F_y}{A} + \frac{M_{CD}}{S} = -24 \times 10^{6}$$

$$\sigma_D = \frac{-F_y}{A} - \frac{M_{CD}}{S} = -6 \times 10^{6}$$

$$\sigma_C - \sigma_D = \frac{2M_{CD}}{S} = -18 \times 10^{6} \Rightarrow M_{CD} = -1503\ N.m$$

$$M_{AB} - F_x \times 0.2 + M_{CD} = 0 \Rightarrow 2500 - 0.2F_x - 1503 = 0 \Rightarrow F_x = 5\ kN$$

۸-۲۳. برای تعیین مقدار نیروی قائم خارج از مرکز F که بر روی یک ستون فولادی با مقطع سپری تأثیر می‌کند، کرنش سنجهایی در نقاط A و B نصب شدند. مطلوب است تعیین نیروی F در صورتی که کرنش طولی در A مساوی -100×10^{-6} میلی‌متر بر میلی‌متر و در نقطهٔ B مساوی -800×10^{-6} میلی‌متر بر میلی‌متر باشد. ضریب ارتجاعی فولاد مساوی 2×10^{5} و ضریب ارتجاعی برشی آن مساوی $0/84 \times 10^{5}$ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد. مساحت مقطع ستون نیز مساوی ۴۰۰۰ میلی‌مترمربع است.



مسأله ۸-۲۳

$$P = -F \quad \text{و} \quad M = F.e \;)^{+}$$

$$\sigma_A = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{-F}{A} + \frac{(F.e)(40)}{I}$$

$$\sigma_A = E\varepsilon = (2 \times 10^{5})(-100 \times 10^{-6}) = -20\,MPa$$

از ترکیب دو رابطه فوق داریم:

$$F = A\left(20 + 40\frac{F.e}{I}\right) \qquad (1)$$

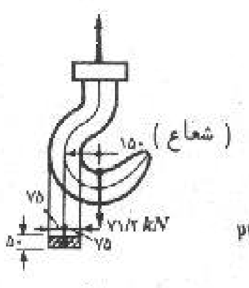
$$\sigma_B = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{-F}{A} - \frac{(F.e)(80)}{I}$$

$$\sigma_B = E\varepsilon = (2 \times 10^{5})(-800 \times 10^{-6}) = -160\,MPa$$

$$\sigma_A - \sigma_B = \frac{120\,F.e}{I} = 140\,MPa \Rightarrow \frac{F.e}{I} = 1/17$$

$$(1) \Rightarrow F = 4000\,[20 + 40(1/17)] = 266/7\,kN$$

۸-۲۴. مطابق شکل، یک قلاب فولادی تحت تأثیر نیروی به طرف پایین ۷۱/۲ کیلونیوتن قرار دارد. شعاع محور منحنی شکل تیر مساوی ۱۵۰ میلی‌متر می‌باشد. مطلوب است تعیین حداکثر تنش تولید شده در قلاب. تمام اندازه‌های نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر می‌باشند.



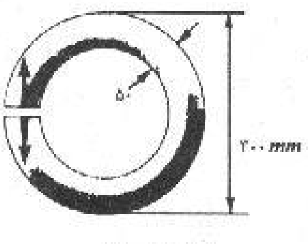
مسأله ۸-۲۴

$$R = \frac{h}{\ln\frac{r_o}{r_i}} = \frac{150}{\ln\frac{225}{75}} = 136/5$$

$$\sigma_i = \frac{P}{A} + \frac{M(R - r_i)}{r_i A(\bar{r} - R)} = \frac{۷۱۲۰۰}{۱۵۰ \times ۵۰} + \frac{(۷۱۲۰۰ \times ۱۵۰)(۱۳۶/۵ - ۷۵)}{۷۵ \times (۱۵۰ \times ۵۰)(۱۵۰ - ۱۳۶/۵)} = ۸۶/۵\,MPa$$

$$\sigma_o = \frac{P}{A} + \frac{M(R - r_o)}{r_o A(\bar{r} - R)} = \frac{۷۱۲۰۰}{۱۵۰ \times ۵۰} + \frac{(۷۱۲۰۰ \times ۱۵۰)(۱۳۶/۵ - ۲۲۵)}{۲۲۵(۱۵۰ \times ۵۰)(۱۵۰ - ۱۳۶/۵)} = -۴۱/۵$$

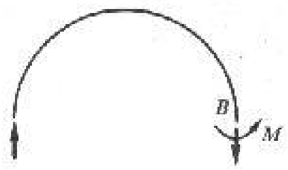
۸-۲۵. یک میلهٔ فولادی با مقطع دایره به قطر ۵۰ میلی‌متر، به صورت حلقه‌ای دایره به قطر خارجی ۳۰۰ میلی‌متر در آمده. مطلوب است: (الف) تعیین حداکثر تنش ایجاد شده در حلقه در اثر نیروی ۱۰ کیلونیوتنی که مطابق شکل بر دو انتهای باز آن وارد می‌شود. (ب) مطلوب است تعیین نسبت تنش حداکثر به دست آمده در قسمت الف به بزرگترین تنش فشاری که به طور قائم بر همان مقطع تأثیر می‌کند.



مسأله ۸-۲۵

$$M = ۱۰ \times (۳ - ۰/۵) = ۲/۵\,kN.m$$

$$R = \frac{\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^۲ - c^۲}}{۲} = \frac{۱۲۵ + \sqrt{۱۲۵^۲ - ۲۵^۲}}{۲} = ۱۲۴\,mm$$



ماکزیمم تنش در نقطه B رخ می‌دهد زیرا ممان در این نقطه ماکزیمم می‌باشد.

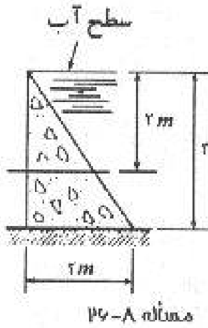
$$\sigma_i = \frac{P}{A} + \frac{M(R - r_i)}{r_i A(\bar{r} - R)} = \frac{۱۰۰۰۰}{\pi(۲۵)^۲} + \frac{۲/۵ \times ۱۰^۶\,(N.mm)\,(۱۲۴ - ۱۰۰)}{۱۰۰ \times \pi(۲۵)^۲(۱۲۵ - ۱۲۴)} = ۳۱۰/۷\,MPa$$

$$\sigma_o = \frac{P}{A} + \frac{M(R - r_o)}{r_o A(\bar{r} - R)} = \frac{۱۰۰۰۰}{\pi(۲۵)^۲} + \frac{۲/۵ \times ۱۰^۶(۱۲۴ - ۱۵۰)}{۱۵۰ \times \pi(۲۵)^۲(۱۲۵ - ۱۲۴)} = -۲۱۵/۶\,MPa$$

ب)

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{comp}} = \frac{۳۱۰/۷}{-۲۱۵/۶} = ۱/۴۴$$

۸-۲۶. ابعاد و مشخصات هندسی یک سد بتنی کوچک، همراه با ارتفاع آب در دریاچهٔ پشت آن، در شکل نشان داده شده است. با فرض اینکه بتن بتواند مقداری کشش تحمل نماید، مطلوب است تعیین تنشهای قائم مؤثر بر یک مقطع افقی به فاصلهٔ ۲ متر از بالای آن. جرم مخصوص آب را ۱۰۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب و جرم مخصوص بتن را ۲۳۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب و g را مساوی ۱۰ متر بر مجذور ثانیه فرض نمایید.



مسأله ۸-۲۶

وزن واحد طول : $\text{وزن} = \text{حجم} \times \text{وزن حجمی} = (A \times ۱) \times \gamma = A \rho g$

وزن یک متر سد : $W = \left(\frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۱/۳۳\right) \times ۲۳۰۰ \times ۱۰ = ۳۰۵۹۰\, N/m = ۳۰/۵۹\, kN/m$

$$P_V = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۱/۳۳ \times ۱۰۰۰ \times ۱۰ = ۱۳/۳\, kN/m$$

$$P_H = ۲ \times ۱ \times ۱۰۰۰ \times ۱۰ = ۲۰\, kN/m$$

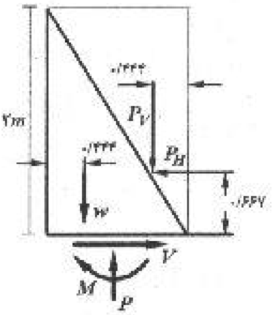
$$P = -P - W = -۱۳/۳ - ۳۰/۵۹ = ۴۳/۹\, kN/m$$

$$M = ۲۰\,(۰/۶۶۷) + ۳۰/۵۹\,(۰/۶۶۷ - ۰/۴۴۴) - ۱۳/۳\,(۰/۶۶۷ - ۰/۴۴۴)$$

$$M = ۱۷/۲\, kNm/m$$

$$\sigma_t = \frac{P}{A} + \frac{MI}{c} = \frac{-۴۳/۹}{۱/۳۳} + \frac{۱۷/۲\left(\frac{۱/۳۳}{۲}\right)}{\frac{۱}{۱۲}(۱)(۱/۳۳)^۳} = ۲۵/۱۳\, kN/m$$

$$\sigma_c = \frac{P}{A} - \frac{MI}{c} = \frac{-۴۳/۹}{۱/۳۳} + \frac{۱۷/۲\left(\frac{۱/۳۳}{۲}\right)}{\frac{۱}{۱۲}(۱)(۱/۳۳)^۳} = -۹۱/۳\, kN/m$$



۸-۲۷. در سد زیر ارتفاع h چقدر باشد تا تنش در نقطهٔ A مساوی صفر شود. جرم مخصوص آب را ۱۰۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب و جرم مخصوص بتن را ۲۳۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب و g را مساوی ۱۰ متر بر مجذور ثانیه فرض نمایید.

وزن واحد طول : $w = A \times ۱ \times \gamma = A\rho g$

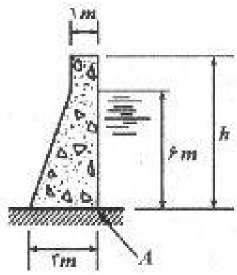
$$w_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۶ \times ۲۳۰۰ \times ۱۰ = ۱۳۸\, kN/m$$

$$w_۲ = (۱ \times h) \times ۲۳۰۰ \times ۱۰ = ۲۳h\ kN/m$$

$$H = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times (۱۰۰۰ \times ۱۰) \times ۶ = ۱۸۰\, kN/m$$

نیروی عمودی = وزن واحد طول سد :

$$\rho = -(w_۱ + w_۲) = -۱۶۱\, kN/m$$



مسأله ۸-۲۷

$$M = ۱۳۸ \times \left(۱/۵ - \frac{۴}{۳}\right) + ۲۳h \times ۱ - ۱۸۰ \times \frac{۶}{۳} = ۲۳h - ۳۳۷$$

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{S} = \frac{۱۳۸ + ۲۳h}{۳ \times ۱} + \frac{۲۳h - ۳۳۷}{\frac{۱}{۶}(۱)(۳)^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۳۸ + ۲۳h + ۴۶h - ۶۷۴ = ۰ \Rightarrow h = ۶/۱۶m$$

۸-۲۸. ضخامت t در سد نشان داده شده چقدر باشد تا در سطح تماس شالوده سد با زمین ایجاد کشش نگردد. وزن مخصوص آب و بتن را مثل مسأله ۸-۲۷ فرض نمایید.

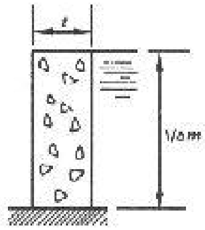
$$w = (۱/۵ \times t) \times ۲۳۰۰ \times ۱۰ = ۳۴/۵t \ kN/m$$

$$H = \frac{۱}{۲} \times ۱/۵ \times ۱/۵ \times ۱۰۰۰۰ = ۱۱/۳ kN/m$$

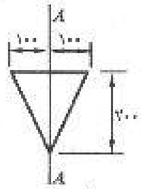
$$P = -w = -۳۴/۵t \ kN/m$$

$$M = H \times \frac{۱/۵}{۳} = ۵/۶۵ kN.m/m$$

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{S} = ۰ \Rightarrow -\frac{۳۴/۵t}{t \times ۱} + \frac{۵/۶۵}{\frac{۱}{۶}(۱)t^۲} = ۰ \rightarrow t = ۱m$$



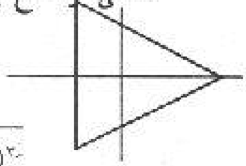
مسئله ۸-۲۸



مسئله ۸-۲۹

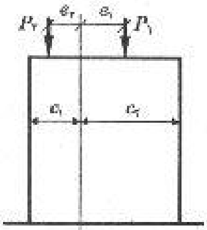
۸-۲۹. مقطع افقی یک ستون کوتاه مطابق شکل می‌باشد (تمام ابعاد بر حسب میلی‌متر). در روی خط $A-A$ محدوده‌ای را تعیین نمایید به طوری که اگر یک بار قائم رو به پایین در این محدوده بر ستون وارد شود، هیچ گونه کششی در مقطع ایجاد نگردد.

(ابعاد برحسب میلی‌متر)



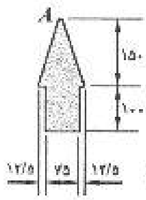
$$\sigma = \frac{-P_۱}{A} + \frac{M_۱c_۱}{I} = ۰ \Rightarrow \frac{-P_۱}{\frac{۱}{۲}(۲۰۰)(۲۰۰)} + \frac{(P_۱e_۱)(\frac{۲۰۰}{۳})}{\frac{۱}{۳۶}(۲۰۰)(۲۰۰)^۳}$$

$$\longrightarrow e_۱ = ۳۳/۳mm$$



$$\frac{-P_۲}{A} + \frac{M_۲c_۲}{I} = ۰ \Rightarrow \frac{-P_۲}{\frac{۱}{۲}(۲۰۰)^۲} + \frac{(P_۲e_۲)\left(۲۰۰ - \frac{۲۰۰}{۳}\right)}{\frac{۱}{۳۶}(۲۰۰)^۴}$$

$$\longrightarrow e_۲ = ۱۶/۷mm$$



مسئله ۸-۳۰

۸-۳۰. مقطع افقی یک ستون کوتاه مطابق شکل می‌باشد (تمام ابعاد بر حسب میلی‌متر). در روی محور تقارن مقطع فوق، محدوده‌ای را تعیین نمایید به طوری که اگر یک بار قائم رو به پایین در این محدوده بر ستون وارد شود، هیچگونه کششی در مقطع ایجاد نگردد.

$$\bar{y} = \frac{(۷۵ \times ۱۰۰)(۵۰) + \frac{۱}{۲}(۱۵۰ \times ۱۰۰)(۱۵۰)}{۷۵ \times ۱۰۰ + \frac{۱}{۲} \times ۱۵۰ \times ۱۰۰} = ۱۰۰ \ mm$$ از پایین

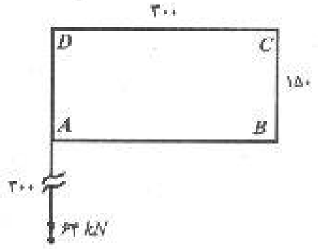
$$I = \frac{۱}{۱۲}(۷۵)(۱۰۰)^۳ + (۷۵ \times ۱۰۰)(۵۰)^۲ + \frac{۱}{۳۶}(۱۰۰)(۱۵۰)^۳ + \left(\frac{۱}{۲} \times ۱۵۰ \times ۱۰۰\right)(۵۰)^۲$$

$$\longrightarrow I = ۵۳/۱۲۵ \times ۱۰^۶ \ mm^۴$$

$$\sigma_A = ۰ = \frac{-P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{-P}{۱۵۰۰۰} + \frac{(Pe)(۱۵۰)}{۵۳/۱۲۵ \times ۱۰^۶} = ۰ \rightarrow e = ۲۳/۶ \ mm$$

یعنی محدوده مورد نظر زیر محور خنثی و تا فاصله $۲۳/۶ \ mm$ از آن می‌باشد.

۸-۳۱. مثال ۸-۵ را با قرار دادن نیروی P در روی ضلع AD به فاصلهٔ ۳۷۵ میلی‌متر از محور تقارن، مجدداً حل نمایید.



$$M_{yy} = ۶۴ \times ۰/۱۵ = ۹/۶\, kN.m$$

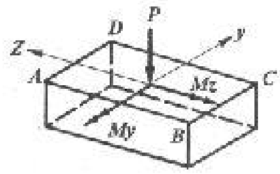
$$M_{zz} = ۶۴ \times ۰/۳۷۵ = ۲۴\, kN.m$$

$$S_{yy} = ۲/۲۵ \times ۱۰^{-۳}\, m^۳,\ S_{zz} = ۱/۱۲۵ \times ۱۰^{-۳}\, m^۳$$

$$\frac{P}{A} = \frac{۶۴}{۰/۳ \times ۰/۱۵} = ۱۴۲۲\, kN/m^۲$$

$$\frac{M_{yy}}{S_{yy}} = \frac{۹/۶}{۲/۲۵ \times ۱۰^{-۳}} = ۴۲۶۷\, kN/m^۲$$

$$\frac{M_{zz}}{S_{zz}} = \frac{۲۴}{۱/۱۲۵ \times ۱۰^{-۳}} = ۲۱۳۳۳\, kN/m^۲$$

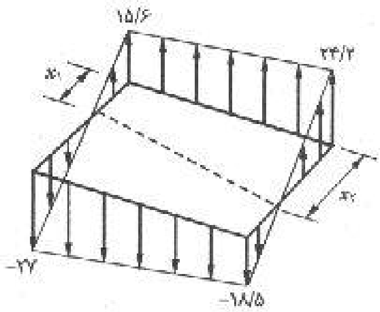


$$\sigma_A = -۱/۴۲ - ۴/۲۷ - ۲۱/۳۳ = -۲۷\, MPa$$

$$\sigma_B = -۱/۴۲ + ۴/۲۷ - ۲۱/۳۳ = -۱۸/۵\, MPa$$

$$\sigma_C = -۱/۴۲ + ۴/۲۷ + ۲۱/۳۳ = ۲۴/۲\, MPa$$

$$\sigma_D = -۱/۴۲ - ۴/۲۷ + ۲۱/۳۳ = ۱۵/۶\, MPa$$



$$\frac{x_۱}{۱۵/۶} = \frac{۱۵۰}{۱۵/۶ + ۲۷} \Rightarrow x_۱ = ۵۴/۹\, mm$$

$$\frac{x_۲}{۲۴/۲} = \frac{۱۵۰}{۲۴/۲ + ۱۸/۵} \Rightarrow x_۲ = ۸۵\, mm$$

۸-۳۲. اگر ستون کوتاه نشان داده شده در شکل ۸-۱۲- الف از فولاد با وزن مخصوص ۷۵ کیلونیوتن بر مترمکعب ساخته شده باشد، مطلوب است تعیین نیروی P به طوری که تنش در نقطهٔ D مساوی صفر گردد. از وزن لچکی کوچکی که بار روی آن وارد می‌شود، صرف‌نظر کنید. برای همین شرایط، خط تنش صفر در روی مقطع $ABCD$ را تعیین نمایید.

$$\sigma_D = ۰ = \frac{-P'}{A} - \frac{M_{yy}}{S_{yy}} + \frac{M_{zz}}{S_{zz}} = \frac{P + ۷۵ \times ۰/۳ \times ۰/۱۵ \times ۰/۵}{۰/۳ \times ۰/۱۵}$$

$$- \frac{P \times ۰/۱۵}{۲/۲۵ \times ۱۰^{-۳}} + \frac{P \times ۰/۱۵}{۱/۱۲۵ \times ۱۰^{-۳}} \Rightarrow ۴۴/۴P = ۳۷/۵ \longrightarrow P = ۰/۸۸۴\, kN = ۸۸۴\, N$$

$$-\frac{P'}{A} = -\frac{۰/۸۴۴ + ۱/۶۸۸}{۰/۳ \times ۰/۱۵} = -۵۶/۳\,kN/m^{۲}$$

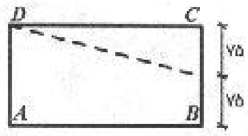
$$\frac{M_{yy}}{S_{yy}} = \frac{۰/۸۴۴ \times ۰/۱۵}{۲/۲۵ \times ۱۰^{-۳}} = -۵۶/۳\,kN/m^{۲}$$

$$\frac{M_{zz}}{S_{zz}} = \frac{۰/۸۴۴ \times ۰/۱۵}{۱/۱۲۵ \times ۱۰^{-۳}} = -۱۱۲/۵\,kN/m^{۲}$$

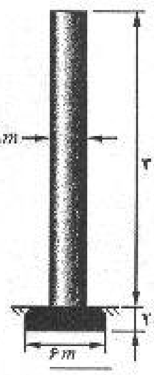
$$\sigma_A = -۵۶/۳ - ۵۶/۳ - ۱۱۲/۵ = -۲۲۵\,kN/m^{۲}$$

$$\sigma_B = -۵۶/۳ + ۵۶/۳ - ۱۱۲/۵ = -۱۱۲/۵\,kN/m^{۲}$$

$$\sigma_C = -۵۶/۳ + ۵۶/۳ + ۱۱۲/۵ = ۱۱۲/۵\,kN/m^{۲}$$



چون $\sigma_B = -\sigma_C$ بنابراین خط تنش صفر از وسط فاصله BC عبور می‌کند.



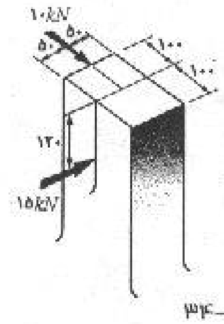
مسأله ۸-۳۳

۸-۳۳. یک دودکش فولادی به قطر ۲/۵ متر که از داخل توسط آجر روکش شده است، در روی شالوده‌ای به ابعاد ۶ × ۶ متر قرار دارد. وزن دودکش با شالودهٔ آن مساوی ۷۶/۵ کیلونیوتن می‌باشد. در صورتی که بر این دودکش بادی به موازات یکی از اضلاع شالودهٔ آن و با فشار ۱ کیلونیوتن بر مترمربع تصویر دودکش بر روی صفحهٔ قائم بوزد، حداکثر فشار تولید شده در روی شالوده چقدر خواهد بود.

$$P = (۳۰ \times ۲/۵)(۱) = ۷۵\,kN \qquad M = ۷۵ \times (۱۵ + ۲) = ۱۲۷۵\,kN.m$$

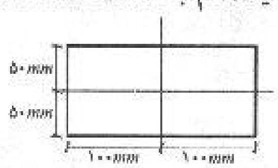
$$S = \frac{۱}{۶}(۶)(۶)^{۲} = ۳۶\,m^{۳}$$

$$\sigma = -\frac{P}{A} \pm \frac{M}{S} = -\frac{۷۵}{۳۶} \pm \frac{۱۲۷۵}{۳۶} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_۱ = ۳۳/۳\,kPa & \text{کششی} \\ \sigma_۲ = -۳۷/۵\,kPa & \text{فشاری} \end{cases}$$



مسأله ۸-۳۴

۸-۳۴. یک قطعهٔ چدنی همانند شکل بارگذاری شده است. با صرف‌نظر کردن از وزن قطعه، مطلوب است تعیین تنشهای قائم مؤثر بر مقطعی که در فاصلهٔ ۰/۵ متری از بالای قطعه قرار دارد. هم چنین خط تنشهای صفر را نیز تعیین کنید. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر هستند.



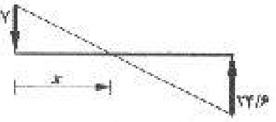
$$M_{xx} = 15(0.5 - 0.12) = 5.7\,kN.m$$

$$M_{yy} = 10 \times 0.5 = 5\,kN.m$$

$$I_{xx} = \frac{1}{12}(0.2)(0.1)^3 = 1.67 \times 10^{-5} m^4$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12}(0.1)(0.2)^3 = 6.67 \times 10^{-5} m^4$$

$$\sigma_A = \frac{5.7 \times 10^{-3}(MN.m)(0.05)}{1.67 \times 10^{-5}} + \frac{5 \times 10^{-3}(MN.m)(0.1)}{6.67 \times 10^{-5}} = 17.07 + 7.5 = 24.61\,MPa$$



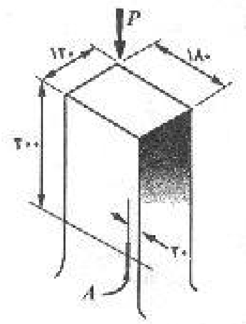
$$\sigma_B = 17.07 - 7.5 = +9.57\,MPa$$

$$\sigma_C = -17.07 - 7.5 = -24.6\,MPa$$

$$\sigma_D = -17.07 + 7.5 = -9.57\,MPa$$

$$x = \frac{9.57}{9.57 + 24.6} \times 100 = 28\,mm$$

۸-۳۵. یک قطعهٔ آلومینیومی همانند شکل بارگذاری شده است. در اثر این بار، در نقطه A کرنشی معادلی 500×10^{-6} میلی‌متر بر میلی‌متر ایجاد می‌شود. مطلوب است تعیین مقدار نیروی واردهٔ P. ضریب ارتجاعی آلومینیوم مساوی 0.1×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد و تمام ابعاد نشان داده شده در شکل برحسب میلی‌متر هستند.



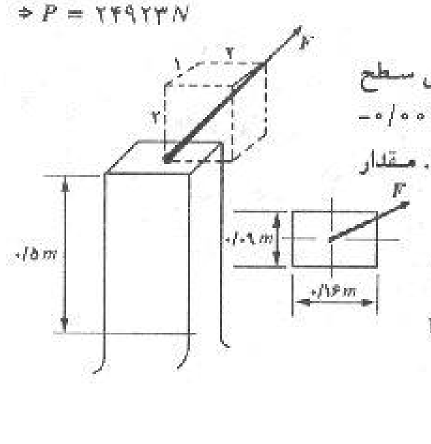
مسأله ۸-۳۵

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{-P}{A} + \frac{M_{xx}}{S_{xx}} + \frac{M_{yy}\,c}{I_{yy}}$$

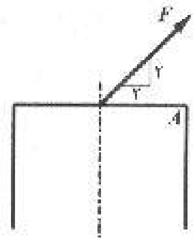
$$0.1 \times 10^5 \times 500 \times 10^{-6} = \frac{-P}{(120 \times 180)} + \frac{60P}{\frac{1}{6}(180)(120)^2} + \frac{90P \times 70}{\frac{1}{12}(120)(180)^3}$$

$$\Rightarrow P = 24923\,N$$

۸-۳۶. اگر در اثر اعمال نیروی مایل F بر مرکز هندسی سطح مقطع عضو نشان داده شده، کرنشی معادل -0.0001 میلی‌متر بر میلی‌متر در نقطهٔ A ایجاد می‌شود. مقدار نیروی F چقدر می‌باشد. ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.



مسأله ۸-۳۶

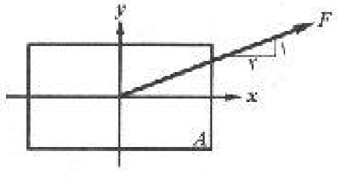


$$\sqrt{۲^۲ + ۲^۲ + ۱^۲} = ۳$$

$$F_x = \frac{۲}{۳}F \ , \ F_y = \frac{۱}{۳}F \ , \ F_z = \frac{۲}{۳}F$$

$$\sigma_A = \frac{P}{A} + \frac{M_{xx}}{S_{xx}} - \frac{M_{yy}}{S_{yy}} = \frac{F_y}{A} + \frac{۰/۵ \times F_y}{S_{xx}} - \frac{۰/۵ \times F_x}{S_{yy}}$$

$$= \frac{\frac{۲}{۳}F}{۰/۰۹ \times ۰/۱۶} + \frac{۰/۵ \times \left(\frac{۱}{۳}F\right)}{\frac{۱}{۶}(۰/۱۶)(۰/۰۹)^۲} - \frac{۰/۵ \times \left(\frac{۲}{۳}F\right)}{\frac{۱}{۶}(۰/۰۹)(۰/۱۶)^۲} = ۴۶/۳F + ۷۷۱/۶F - ۸۶۸F$$

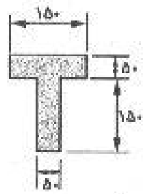


$$\rightarrow \sigma_A = -۵۰/۲F$$

$$\sigma_A = E\varepsilon = (۲ \times ۱۰^۵)(-۱۰^{-۴}) = -۲۰\ MPa$$

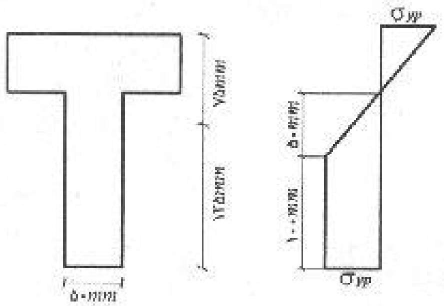
$$-۲۰ \times ۱۰^۶ = -۵۰/۲F \Rightarrow F = ۳۹۸\ kN$$

۸-۳۷. یک تیر T از مصالحی ارتجاعی - خمیری، دارای ابعادی مطابق شکل می‌باشد. (الف) اگر کرنش در بالای بال مساوی $-\varepsilon_{yp}$ و در محل برخورد بال با جان صفر باشد، نیروی محوری P و لنگر خمشی M مؤثر بر مقطع را تعیین نمایید. تنش جاری شدن را مساوی ۲۵۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید. (ب) اگر نیروهای به دست آمده در قسمت (الف) حذف شوند، چه تنشهای پس‌ماندی در مقطع به وجود می‌آید.



مسئله ۸-۳۷

(ابعاد بر حسب میلی‌متر)



(الف)

$$\bar{y} = \frac{(۱۵۰ \times ۵۰)(۲۵) + (۱۵۰ \times ۵۰)(۱۲۵)}{۲ \times ۱۵۰ \times ۵۰} = ۷۵$$

$$P = -\frac{۱}{۲}\sigma_{yp} \times ۵۰ \times ۱۵۰ + \frac{۱}{۲}\sigma_{yp} \times ۵۰ \times ۵۰ + \sigma_{yp} \times ۱۰۰ \times ۵۰$$

$$\Rightarrow P = ۲۵۰۰\sigma_{yp} \quad \Rightarrow P = ۶۲۵kN$$

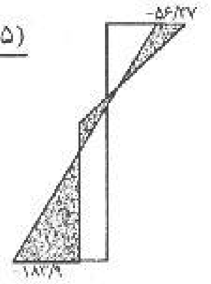
$$M = \frac{۱}{۲}\sigma_{yp} \times ۱۵۰ \times ۵۰ \times ۷۵ + \frac{۱}{۲}\sigma_{yp} \times ۵۰ \times ۵۰ \times ۸/۳۳ + \sigma_{yp} \times ۱۰۰ \times ۵۰ \times ۷۵$$

$$= ۱۶۶/۷ \times ۱۰^۶ N.mm \quad \Rightarrow M = ۱۶۶/۷ \times ۱۰^۳ N.m$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۱۵۰)(۵۰)^۳ + (۱۵۰ \times ۵۰)(۵۰)^۲ + \frac{۱}{۱۲}(۵۰)(۱۵۰)^۳ + (۱۵۰ \times ۵۰)(۵۰)^۲$$

$$= ۵۳/۱۲۵ \times ۱۰^۶ mm^۴$$

$$\sigma_{t_۱, elas} = \frac{-P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{-۶۲۵ \times ۱۰^۳}{۲ \times ۱۵۰ \times ۵۰} + \frac{(۱۶۶/۷ \times ۱۰^۶)(۷۵)}{۵۳/۱۲۵ \times ۱۰^۶} = ۱۹۳/۶۳ MPa$$

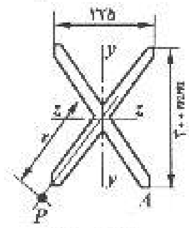


$$\sigma_{b_۱, elas} = \frac{-P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{-۶۲۵ \times ۱۰^۳}{۲ \times ۱۵۰ \times ۵۰} - \frac{(۱۶۶/۷ \times ۱۰^۶)(۱۲۵)}{۵۳/۱۲۵ \times ۱۰^۶}$$

$$= -۴۳۳/۹ MPa$$

$$\sigma_{t_۱, res} = -۲۵۰ + ۱۹۳/۶۳ = -۵۶/۳۷ MPa$$

$$\sigma_{b_۱, res} = ۲۵۰ - ۴۳۳/۹ = -۱۸۳/۹ MPa$$



مسأله ۸-۳۸

۸-۳۸. یک عضو فشاری کوتاه دارای مقطعی مطابق شکل می‌باشد. مشخصات هندسی این مقطع بدین قرار است: $I_{yy} = ۲۴۷ \times ۱۰^۶ mm^۴$ و $I_{zz} = ۴۶۸ \times ۱۰^۶ mm^۴$ و $A = ۴۶۰۰۰ mm^۲$ مطلوب است تعیین فاصلهٔ r در امتداد قطر، به نحوی که اگر یک نیروی محوری P بر آن وارد شود، نقطهٔ A در روی خط تنشهای صفر قرار گیرد. از وزن عضو صرف‌نظر نمایید.

$$\sigma_A = ۰ = \frac{-P}{A} - \frac{M_{zz} \times ۱۵۰}{I_{zz}} + \frac{M_{yy} \times ۱۱۲/۵}{I_{yy}}$$

$$y = \frac{۳۰۰}{۲۲۵} z = ۱/۳۳ z \qquad M_{zz} = Py = ۱/۳۳ Pz$$

$$M_{yy} = Pz$$

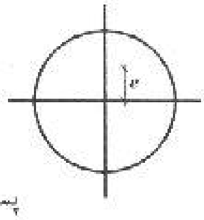
$$\sigma_A = \frac{-P}{۴۶۰۰۰} - \frac{(۱/۳۳ Pz)(۱۵۰)}{۴۶۸ \times ۱۰^۶} + \frac{(Pz)(۱۱۲/۵)}{۲۴۷ \times ۱۰^۶} = ۰ \Rightarrow z = ۷۴۵ mm$$

$$y = ۱/۳۳ z = ۹۹۱ mm$$

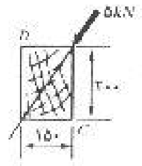
$$r = \sqrt{z^۲ + y^۲} = ۱۲۴۰ mm$$

۸-۳۹. مطلوب است تعیین هستهٔ مرکزی مقطعی به شکل دایره.

$$\sigma_B = ۰ \Rightarrow \frac{-P}{A} + \frac{Mc}{I} = ۰ \Rightarrow \frac{-P}{\pi r^۲} + \frac{(Pe)r}{\frac{\pi r^۴}{۴}} = ۰ \rightarrow e = \frac{r}{۴}$$



پس هستهٔ مرکزی دایره‌ای به شعاع $\frac{r}{۴}$ می‌باشد.

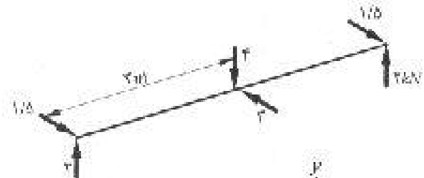


مسأله ۸-۴۰

۸-۴۰. مطابق شکل، یک تیر به دهانهٔ ۶ متر و مقطع ۲۰۰ × ۱۵۰ میلی‌متر، در وسط دهانه توسط بار متمرکز مایلی به مقدار ۵ کیلونیوتن بارگذاری شده است. با صرف‌نظر کردن از وزن تیر، مطلوب است تعیین تنش حداکثر خمشی و محل محور خنثی. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر می‌باشند.

$$\sigma = \pm \frac{M_{xx}}{S_{xx}} \pm \frac{M_{yy}}{S_{yy}}$$

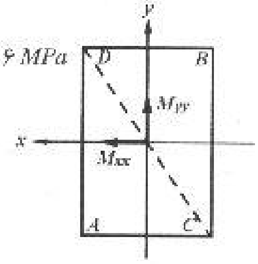
نیروی $5kN$ با توجه به هندسه شکل به دو نیروی $4kN$ و $3kN$ در جهت محورها تجزیه می‌شود و با توجه به این که نیرو در وسط دهانه تیر وارد می‌شود، نیروهای تکیه‌گاهی در هر طرف، نصف این نیروها یعنی $2kN$ و $1/5kN$ خواهد بود.



$M_{xx} = ۲ \times ۳ = ۶\,kN.m$

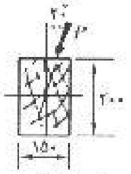
$M_{yy} = ۱/۵ \times ۳ = ۴/۵\,kN.m$

$$\sigma = \pm \frac{۶۰۰۰}{\frac{۱}{۶}(۰/۱۵)(۰/۲)^۲} \pm \frac{۴۵۰۰}{\frac{۱}{۶}(۰/۲)(۰/۱۵)^۲} = \pm ۶\,MPa \pm ۶\,MPa$$



$\sigma_A = ۶ + ۶ = ۱۲\,MPa$ $\qquad$ $\sigma_B = -۶ - ۶ = -۱۲\,MPa$

$\sigma_C = ۶ - ۶ = ۰$ $\qquad$ $\sigma_D = -۶ + ۶ = ۰$



مسأله ۸-۴۱

۸-۴۱. مطابق شکل، تیری به دهانه ۶ متر و به مقطع ۲۰۰ × ۱۵۰، در وسط دهانه توسط بار متمرکز مایل P بارگذاری شده است. اگر حداکثر تنش خمشی مساوی ۸/۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، با صرف‌نظر کردن از وزن تیر، مقدار نیرویی P چقدر است. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر می‌باشد.

$$R = \frac{P}{۲} \text{ و } M = \frac{P}{۲}x \Rightarrow M_{max} = \frac{P}{۲} \cdot \frac{L}{۲} = \frac{PL}{۴} = ۱/۵P\ N.m$$

$M_{xx} = M\cos ۲۰°$ و $M_{yy} = M\sin ۲۰°$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{xx}}{S_{xx}} + \frac{M_{yy}}{S_{yy}} + \frac{۱/۵P\cos ۲۰°}{\frac{۱}{۶}(۰/۱۵)(۰/۲)^۲} + \frac{۱/۵P\sin ۲۰°}{\frac{۱}{۶}(۰/۲)(۰/۱۵)^۲}$$

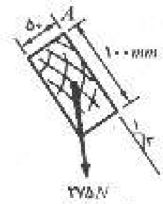
$\sigma_{max} = ۸/۵ \times ۱۰^۶\ N/m^۲$

با مساوی قرار دادن σ_{max} در روابط فوق داریم:

$P = ۴۰۶۰\,N$

۸-۴۲. یک تیر طره‌ای به دهانه ۲ متر و مقطع مربع مستطیل مایل به ابعاد ۱۰۰ × ۵۰ میلی‌متر مفروض می‌باشد. در انتهای آزاد این تیر، نیروی قائمی مساوی ۲۷۵ نیوتن بر مرکز هندسی مقطع تیر وارد می‌گردد. مطلوب است تعیین تنشهای حداکثر خمشی و محور خنثی در مقطعی در انتهای گیردار تیر. از وزن تیر صرف‌نظر نمایید.

$$M = PL = 275 \times 2 = 550\, N.m$$



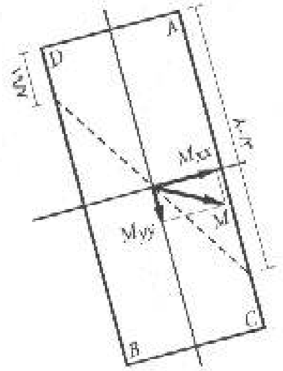
مسأله ۸-۴۲

$$M_{xx} = \frac{3}{\sqrt{10}} \times 550 = 521.8\, N.m$$

$$M_{yy} = \frac{1}{\sqrt{10}} \times 550 = 158\, N.m$$

$$S_{xx} = \frac{1}{6}(0.05)(0.1)^2 = 8.33 \times 10^{-5}\, m^3$$

$$S_{yy} = \frac{1}{6}(0.1)(0.05)^2 = 4.17 \times 10^{-5}\, m^3$$



$$\sigma = \pm \frac{M_{xx}}{S_{xx}} \pm \frac{M_{yy}}{S_{yy}} = \pm \frac{521.8}{8.33 \times 10^{-5}} \pm \frac{158}{4.17 \times 10^{-5}}$$

$$= \pm 6.26 \pm 3.79\, MPa$$

$$\sigma_A = 6.25 + 3.79 = 10.04\, MPa$$

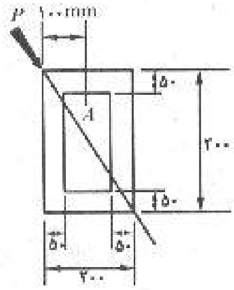
$$\sigma_B = -6.25 - 3.79 = -10.04\, MPa$$

$$\sigma_c = -6.25 + 3.79 = -2.46\, MPa$$

$$\sigma_D = 6.25 - 3.79 = 2.46\, MPa$$

$$d_L = \frac{10.04}{10.04 + 2.46} \times 100 = 80.3\, mm \qquad d_R = \frac{2.46}{10.04 + 2.46} \times 100 = 19.7\, mm$$

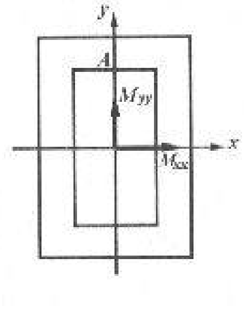
۸-۴۳. مطابق شکل، نیروی مایل P بر یک تیره طره‌ای عمل می‌کند. در مقطع مورد نظر، لنگر خمشی داخلی کل در صفحه نیرو مساوی $10\, kN.m$ می‌باشد. مطلوب است تعیین تنش خمشی در نقطهٔ A.



مسأله ۸-۴۳

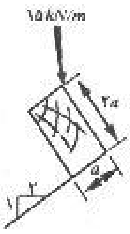
$$I_{xx} = \frac{1}{12}(0.2)(0.3)^3 - \frac{1}{12}(0.1)(0.2)^3 = 3.83 \times 10^{-4}\, m^4$$

$$M_{xx} = \frac{0.3}{\sqrt{0.3^2 + 0.2^2}} \times 10000 = 8320.5\, N.m$$



با توجه به مکان نقطه A مؤلفه M_{yy} از ممان خمشی روی نقطه A تنشی ایجاد نمی‌کند.

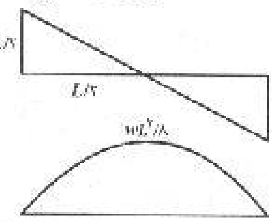
$$\sigma_A = \frac{M_{xx}\,c}{I_{xx}} = \frac{۸۳۲۰/۵ \times (۰/۱)}{۳/۸۳ \times ۱۰^{-۴}} = ۲/۱۵\,MPa$$



مسأله ۸-۴۴

۸-۴۴. تیر ساده‌ای به دهانهٔ ۴ متر و مقطع مربع مستطیل که نسبت اضلاع آن مساوی ۲ می‌باشد، بار گستردهٔ یکنواختی را در وضعیت نشان داده شده در شکل حمل می‌نماید. این بار گسترده وزن تیر را نیز شامل می‌شود. (الف) ابعاد تیر را به نحوی تعیین نمایید که حداکثر تنش از ۱۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع تجاوز نکند. (ب) محل محور خنثای تیر را تعیین نمایید و آن را روی شکل نشان دهید.

(الف



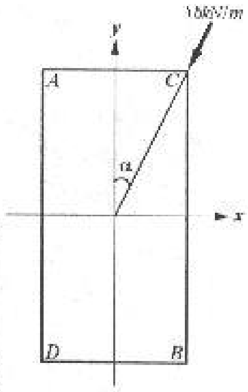
$$M_{max} = \frac{۱}{۲}\,\frac{wL}{۲} \times \frac{L}{۲} = \frac{wL^۲}{۸} = \frac{۱۵ \times ۴^۲}{۸} = ۳۰\,kN.m$$

$$\tan\alpha = \frac{۱}{۲} \rightarrow \alpha = ۲۶/۶^\circ$$

$$\sigma_D = \frac{M_{xx}}{S_{xx}} + \frac{M_{yy}}{S_{yy}} = \frac{۳۰ \times ۱۰^۳ \cos ۲۶/۶}{\frac{۱}{۶}\,(a)\,(۲a)^۲} + \frac{۳۰ \times ۱۰^۳ \sin ۲۶/۶}{\frac{۱}{۶}\,(۲a)\,(a)^۲}$$

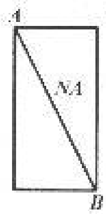
$$= \frac{۸۰۵۰۰}{a^۳} = ۱۰ \times ۱۰^۶\ (N/m^۲) \rightarrow a = ۰/۲\,m = ۲۰۰\,mm$$

(ب



$$\sigma_A = \frac{-۳۰ \times ۱۰^۶ \cos ۲۶/۶\ (N.mm)}{\frac{۱}{۶}\,(۲۰۰)\,(۴۰۰)^۲} + \frac{۳۰ \times ۱۰^۶ \sin ۲۶/۶}{\frac{۱}{۶}\,(۴۰۰)\,(۲۰۰)^۲}$$

$$= -۵/۰۳ + ۵/۰۳ = ۰$$



$$\sigma_B = ۵/۰۳ - ۵/۰۳ = ۰$$

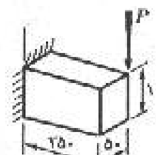
$$\sigma_C = -۵/۰۳ - ۵/۰۳ = -۱۰/۰۶\,MPa$$

$$\sigma_D = ۵/۰۳ + ۵/۰۳ = ۱۰/۰۶\,MPa$$

۸-۴۵. یک تیره طره‌ای به دهانهٔ ۲۵۰ میلی‌متر، مطابق شکل بار P را در انتهای آزاد خود حمل می‌نماید. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی در انتهای گیردار تیر در اثر برش مستقیم و لنگر پیچشی، نتایج را در روی طرحی مشابه شکل ۸-۱۵- ث نشان دهید. تمام اندازه‌های نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر هستند.

$$P = ۵۰\,kN \qquad M = ۵۰ \times ۰/۲۵ = ۱/۲۵\,kN.m$$

$$\tau_{max_1} = \frac{T}{\alpha bc^۲} = \frac{۱/۲۵ \times ۱۰^{-۳}\,MN.m}{(۰/۲۴۶)(۰/۱)(۰/۰۵)^۲} = ۲۰/۳\,MPa$$



مسأله ۸-۴۵

$$\tau_{max\tau} = \frac{۳}{۲}\frac{V}{A} = \frac{۳}{۲} \times \frac{۵۰ \times ۱۰^{-۳}}{(۰/۱ \times ۰/۰۵)} = ۱۵\ MPa$$

$$\tau_{max} = ۲۰/۳ + ۱۵ = ۳۵/۳\ MPa$$

۸-۴۶. یک فنر مارپیچ فشاری از مفتول برنز فسفری به قطر ۳ میلی‌متر ساخته شده و قطر خارجی آن ۳۰ میلی‌متر می‌باشد. اگر تنش برشی مجاز ۲۰۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، چه نیرویی می‌تواند بر این فنر وارد گردد؟ جواب را برای تمرکز تنش تصحیح کنید.

$$m = \frac{۲\bar{r}}{d} = \frac{۲\left[\frac{۱}{۲}(۳۰) - \frac{۱}{۲}(۳)\right]}{۳} = ۹ \longrightarrow K = ۱/۱۶$$

$$F = \frac{\tau_{max}\,\pi d^۳}{۱۶\,K\bar{r}} = \frac{۲۰۰ \times \pi(۳)^۳}{۱۶ \times ۱/۱۶ \times ۱۳/۳} = ۶۸/۷\,N$$

۸-۴۷. فنر مارپیچ شیری به قطر خارجی ۴۸ میلی‌متر، از مفتول فولادی به قطر ۶ میلی‌متر ساخته شده است. نیروی فشاری که در حین عمل به این فنر وارد می‌شود، بین حداقل ۹۰ نیوتن و حداکثر ۳۰۰ نیوتن قرار دارد. اگر ۸ مارپیچ فعال در این فنر وجود داشته باشد، میزان بازشدگی شیر و حداکثر تنش برشی فنر را در حین عمل به دست آورید. ضریب ارتجاعی برشی را $۰/۸ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌متر فرض نمایید.

$$\bar{r} = \frac{۴۸ - ۶}{۲} = ۲۱$$

$$m = \frac{۲\bar{r}}{d} = \frac{۲ \times ۲۱}{۶} = ۷ \longrightarrow K = ۱/۲$$

$$\Delta = \frac{۶۴F\bar{r}^۳N}{Gd^۴} = \frac{۶۴ \times (۳۰۰ - ۹۰) \times (۲۱)^۳ \times ۸}{(۰/۸۲ \times ۱۰^۵)(۶)^۴} = ۹/۳۷\,mm$$

$$\tau_{max} = K\frac{۱۶F\bar{r}}{\pi d^۳} = ۱/۲ \times \frac{۱۶ \times ۳۰۰ \times ۲۱}{\pi(۶)^۳} = ۱۷۸/۲۵\,MPa$$

۸-۴۸. یک فنر مارپیچی از پیچاندن مفتول فولادی به قطر ۱۲ میلی‌متر در حول میله‌ای به قطر ۱۲۰ میلی‌متر ساخته شده است. اگر ۱۰ مارپیچ فعال وجود داشته باشد، ثابت فنر چقدر می‌باشد؟ ضریب ارتجاعی برشی را $۰/۸۲ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید. چه نیرویی لازم است بر فنر وارد گردد تا طول آن ۴۰ میلی‌متر کاهش پیدا کند.

$$\Delta = ۱ \quad \text{و} \quad K = F$$

$$k = \frac{Gd^۴}{۶۴\bar{r}^۳N} = \frac{۰/۸۲ \times ۱۰^۵ \times ۱۲^۴}{۶۴(۶۶)^۳(۱۰)} = ۹/۲۴\ N/mm \quad (kN/m)$$

$$F = k\Delta = ۹/۲۴ \times ۴۰ = ۳۶۹/۶\,N$$

۸-۴۹. اگر یک فنر مارپیچ کششی، ساخته شده از مفتول فولادی به قطر ۶ میلی‌متر که دارای ۱۲ مارپیچ فعال به قطر خارجی ۳۰ میلی‌متر باشد، به انتهای فنر مارپیچ کششی دیگری وصل شود که از مفتول فولادی به قطر ۸ میلی‌متر ساخته شده و دارای ۱۸ مارپیچ فعال به قطر خارجی ۴۰ میلی‌متر می‌باشد، ثابت این مجموعه فنر چقدر خواهد بود؟ حداکثر نیرویی که می‌توان بر فنر وارد آورد بدون اینکه تنش برشی از ۴۸۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع تجاوز کند، چقدر است؟ ضریب ارتجاعی برشی را مساوی $۰/۸۲ \times ۱۰^{۵}$ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.

$$\Delta = \frac{F}{k} = \frac{F}{k_۱} + \frac{F}{k_۲} \Rightarrow \frac{۱}{k} = \frac{۱}{k_۱} + \frac{۱}{k_۲}$$

$$k = \frac{Gd^۴}{۶۴\bar{r}^۳ N}$$

$$\frac{۱}{k} = \frac{۶۴}{G}\left[\frac{\bar{r}_۱^۳ N_۱}{d_۱^۴} + \frac{r_۲^۳ N_۲}{d_۲^۴}\right] = \frac{۶۴}{۰/۸۲ \times ۱۰^۵}\left[\frac{۱۲^۳ \times ۲}{۶^۴} + \frac{۱۶^۳ \times ۱۸}{۸^۴}\right]$$

$$\Rightarrow k = ۳۷/۶۸\, N/mm$$

$$m_۱ = \frac{۲\bar{r}_۱}{d_۱} = \frac{۲ \times ۱۲}{۶} = ۴ \longrightarrow K = ۱/۳۷$$

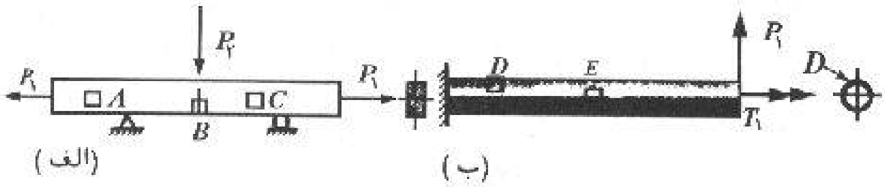
$$m_۲ = \frac{۲\bar{r}_۲}{d_۲} = \frac{۲ \times ۱۶}{۸} = ۴ \longrightarrow K = ۱/۳۷$$

$$F_۱ = \frac{\tau_{max}\, \pi d_۱^۳}{۱۶\, K \bar{r}_۱} = \frac{۴۸۰ \times \pi \times ۶^۳}{۱۶ \times ۱/۳۷ \times ۱۲} = ۱۲۳۸\, N$$

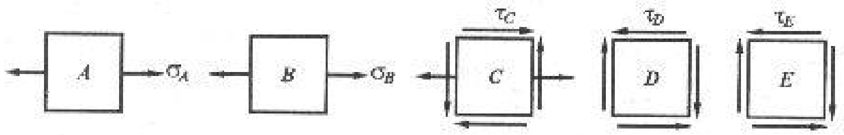
$$F_۲ = \frac{۴۸۰ \times \pi \times ۸^۳}{۱۶ \times ۱/۳۷ \times ۱۶} = ۲۲۰۱\, N$$

مسائل فصل نهم

۹-۱. در دو عضو مختلف نشان داده شده در شکل، جزء سطحهای بینهایت کوچک A، B، C، D و E مشخص شده‌اند. هر کدام از این جزء سطحها را به طور جداگانه رسم نمایید و در روی آنها تنشهای مؤثر را نشان دهید. امتداد و جهت هر تنش را توسط یک بردار نشان دهید و رابطه‌ای را که تنش مزبور از آن به دست می‌آید، بیان کنید. از وزن اعضا صرف‌نظر نمایید.



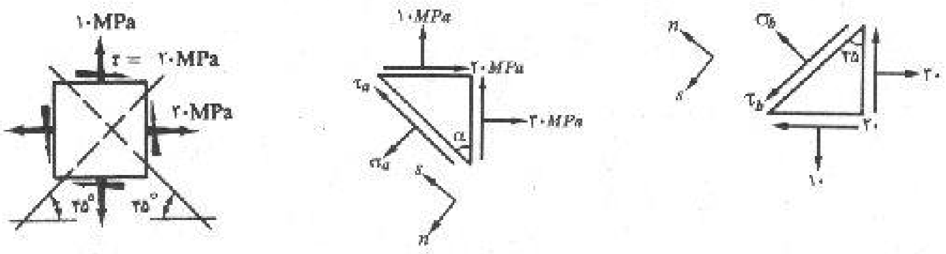
مسئله ۹-۱



$$\sigma_A = \frac{P_1}{A} \qquad \sigma_B = \frac{P_1}{A} + \frac{My}{I} \qquad \sigma_C = \frac{P_1}{A} \qquad \sigma_D = \frac{My}{I} \qquad \tau_E = \frac{Tr}{J}$$

$$\tau_C = \frac{VQ}{It} \qquad \tau_D = \frac{Tr}{J}$$

۹-۲ تا ۹-۵. در هر کدام از جزء سطحهای نشان داده شده، تنشهای قائم و برشی را در سطوح مایل نشان داده شده به دست آورید. برای حل مسائل از روش استاتیکی استفاده نمایید.



مسئله ۹-۲

اگر سطح برش خورده A فرض شود دو سطح دیگر عبارتند از $A\ Cos\ 45$ و $A\ Sin\ 45$

$$\sum F_n = 0 : \sigma_a . A = (\sigma_x . A\ Cos\ \alpha)\ Cos\,\alpha + (\sigma_y\ A\ Sin\alpha)\ Sin\alpha + 2\tau_{xy}\ A\ Sin\alpha\ Cos\alpha$$

$$\sigma_a = \sigma_x\ Cos^2\alpha + \sigma_y\ Sin^2\alpha + \tau_{xy}\ Sin2\alpha$$

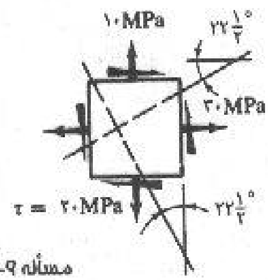
$$\sigma_a = ۳۰\ Cos^۲\ ۴۵° + ۱۰\ Sin^۲\ ۴۵° + ۲۰\ Sin\ ۹۰° = ۴۰\ MPa$$

$$\sum F_s = ۰ : \tau_a . A - \sigma_x A\ Cos\alpha .\ Sin\alpha + \sigma_y A\ Sin\alpha\ Cos\alpha + \tau_{xy} A\ (Sin^۲\alpha - Cos^۲\alpha) = ۰$$

$$\tau_a - ۳۰ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۱۰ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۰ = ۰ \Rightarrow \tau_a = ۱۰\ MPa$$

$$\sum F_n = ۰ ; \sigma_b A - (۳۰ \times A\ Cos\ ۴۵).\ Cos\ ۴۵ - (۱۰ \times A\ Sin\ ۴۵)\ Sin\ ۴۵$$
$$+ ۲ \times ۲۰ \times A\ Sin\ ۴۵\ Cos\ ۴۵ = ۰ \Rightarrow \sigma_b = ۰$$

$$\sum F_s = ۰ : \tau_b . A - (۳۰ \times A\ Cos\ ۴۵).Sin\ ۴۵ + (۱۰ \times A\ Sin\ ۴۵)\ Cos\ ۴۵$$
$$+ ۲۰\ A\ Sin^۲\ ۴۵ - ۲۰ A\ Cos^۲\ ۴۵ = ۰ \qquad \Rightarrow \tau_b = ۱۰\ MPa$$

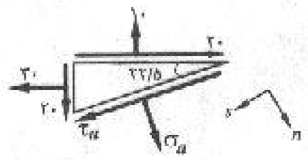


مسأله ۹-۳

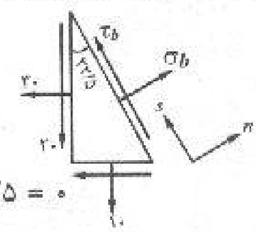
$$\sum F_n = ۰ : \sigma_a . A - (۱۰ \times A\ Cos\ ۲۲/۵)\ Cos\ ۲۲/۵ - (۳۰ \times A\ Sin\ ۲۲/۵)\ Sin\ ۲۲/۵$$
$$+ ۲ \times ۲۰\ A\ Sin\ ۲۲/۵\ Cos\ ۲۲/۵ = ۰ \Rightarrow \sigma_a = -\ ۱/۲۱\ MPa$$

پس σ_a فشاری می‌باشد.

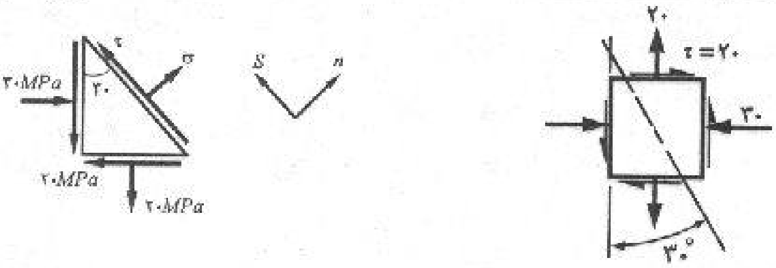
$$\sum F_s = ۰ : \tau_a . A - (۱۰ \times A\ Cos\ ۲۲/۵)\ Sin\ ۲۲/۵ + (۳۰ \times A\ Sin\ ۲۲/۵)\ Cos\ ۲۲/۵$$
$$- (۲۰\ A\ Cos\ ۲۲/۵)\ Cos\ ۲۲/۵ + (۲۰\ A\ Sin\ ۲۲/۵) \times Sin\ ۲۲/۵ = ۰$$
$$\Rightarrow \tau_a = ۷/۰۷\ MPa$$



$$\sum F_n = ۰ : \sigma_b . A - (۳۰ \times A\ Cos\ ۲۲/۵)\ cos\ ۲۲/۵ - (۱۰\ A\ Sin\ ۲۲/۵)\ Sin\ ۲۲/۵$$
$$- ۲ \times ۲۰\ A\ Sin\ ۲۲/۵\ Cos\ ۲۲/۵ = ۰$$
$$\Rightarrow \sigma_b = ۴۱/۲\ MPa$$



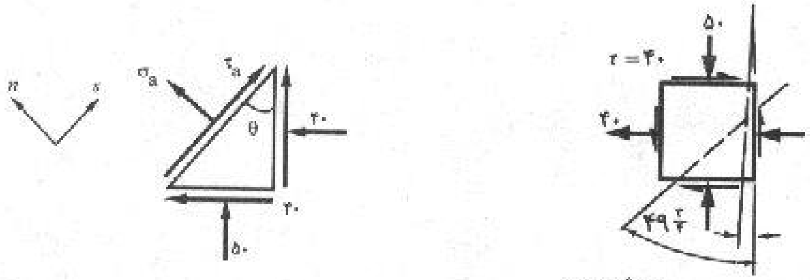
$$\sum F_s = ۰ : \tau_b A + (۳۰\ A\ Cos\ ۲۲/۵)\ Sin\ ۲۲/۵$$
$$- (۱۰\ A\ Sin\ ۲۲/۵)\ Cos\ ۲۲/۵ - ۲۰\ A\ Cos^۲ ۲۲/۵ + ۲۰\ A\ Sin^۲ ۲۲/۵ = ۰$$
$$\Rightarrow \tau_b = ۷/۰۷ MPa$$



مسئله ۴-۹

$$\sum F_n = ۰ : \sigma . A + (۳۰ \times A . Cos\ ۳۰)\ Cos\ ۳۰ - (۲۰ \times A\ Sin\ ۳۰)\ Sin\ ۳۰$$
$$- ۲ \times ۲۰ A\ Sin\ ۳۰\ Cos\ ۳۰ = ۰ \Rightarrow \sigma = -۰/۱۸\ MPa$$

$$\sum F_s = ۰ : \tau A - (۳۰ \times A\ Cos\ ۳۰)\ Sin\ ۳۰ - (۲۰ \times A\ Sin\ ۳۰)\ Cos\ ۳۰$$
$$- ۲۰ \times A\ Cos\ ۳۰\ Cos\ ۳۰ + ۲۰ \times A\ Sin\ ۳۰ \times Sin\ ۳۰ = ۰ \Rightarrow \tau = ۳۱/۶\ MPa$$



مسئله ۵-۹

$$\sum F_n = ۰ :$$

$$\sigma_a A + (۴۰ \times A\ Cos\ \theta)\ Cos\ \theta + (۵۰\ A\ Sin\ \theta)\ Sin\ \theta + ۲ \times ۴۰ \times A\ Sin\ \theta\ Cos\ \theta = ۰ \quad (۱)$$

$\theta = ۴۹/۷۵ \rightarrow \sigma_a = -۸۵/۲۷\ MPa$ فشاری

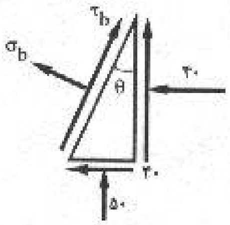
$$\sum F_s = ۰ :$$

$$\tau_a A - (۴۰ \times A\ Cos)\ Sin\theta + (۵۰\ A\ Sin\theta)\ Cos\theta + ۴۰ (A\ Cos\theta)\ Cos\theta$$
$$- ۴۰ (A\ Sin\theta)\ Sin\ \theta = ۰ \quad (۲)$$

$$\theta = ۴۹/۷۵ \rightarrow \tau_a = ۱/۶۷\ MPa$$

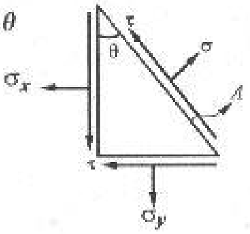
$(۱) \xrightarrow{\theta = ۴/۷۵} \sigma_b = -۴۶/۷\ MPa$ فشاری

$(۲) \xrightarrow{\theta = ۴/۷۵} \tau_b = -۴۰/۲۷\ MPa$



علامت منفی نشان‌دهنده اینست که τ_b در خلاف جهت نشان داده شده در شکل می‌باشد.

۹-۶. رابطهٔ ۹-۲ را بدست آورید.



$$\sum F_s = ۰ : \tau_\theta A = \sigma_y . A \, Sin\,\theta . Cos\,\theta + \tau . A \, Cos\,\theta . Cos\,\theta$$

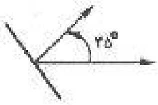
$$- \tau . A \, Sin\,\theta . Sin\,\theta + \sigma_x . A \, Cos\,\theta . Sin\theta$$

$$\tau_\theta = (\tau_y - \tau_x) \, Sin\,\theta \, Cos\theta + \tau \, (Cos^۲\theta - Sin^۲\theta)$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{۲} Sin\,۲\theta + \tau \, Cos\,۲\theta$$

۹-۷. با استفاده از معادلات ۹-۱ و ۹-۲، مسأله ۹-۲ را مجدداً حل نمایید.

الف)

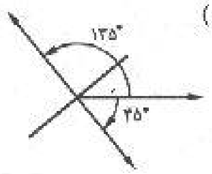


$$\sigma = \frac{۳۰ + ۱۰}{۲} + \frac{۳۰ - ۱۰}{۲} Cos\,۹۰° + ۲۰ \, Sin\,۹۰° = ۴۰ \, MPa$$

$$\theta = ۴۵ \longrightarrow ۲\theta = ۹۰$$

$$\tau = -\frac{۳۰ - ۱۰}{۲} Sin\,۹۰° + ۲۰ \, Cos\,۹۰° = -۱۰ \, MPa$$

ب)



$$\sigma = \frac{۳۰ + ۱۰}{۲} + \frac{۳۰ - ۱۰}{۲} Cos\,۲۷۰° + ۲۰ \, Sin\,۲۷۰° = ۰$$

$$\tau = -\frac{۳۰ - ۱۰}{۲} Sin\,۲۷۰° + ۲۰ \, Cos\,۲۷۰° = ۱۰ \, MPa$$

$$\theta = ۱۳۵° \longrightarrow ۲\theta = ۲۷۰°$$

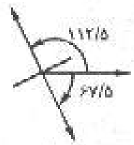
یا

$$\theta = -۴۵° \longrightarrow ۲\theta = -۹۰°$$

۹-۸. با استفاده از معادلات ۹-۱ و ۹-۲، مسأله ۹-۲ را مجدداً حل نمایید.

الف)

$$\sigma_a = \frac{۳۰ + ۱۰}{۲} + \frac{۳۰ - ۱۰}{۲} Cos\,(۲ \times ۱۱۲/۵)° + ۲۰ \, Sin\,(۲ \times ۱۱۲/۵)° = -۱/۲۱ \, MPa$$



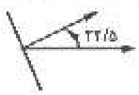
$$\tau_a = -\frac{۳۰ - ۱۰}{۲} Sin\,(۲ \times ۱۱۲/۵)° + ۲۰ \, Cos\,(۲ \times ۱۱۲/۵)° = -۷/۰۷$$

$$\theta = ۱۱۲/۵$$

و یا $\theta = -۶۷/۵$

ب)

$$\sigma_b = \frac{۳۰ + ۱۰}{۲} + \frac{۳۰ - ۱۰}{۲} Cos\,(۲ \times ۲۲/۵)° + ۲۰ \, Sin\,(۲ \times ۲۲/۵)° = ۴۱/۲ \, MPa$$



$$\tau_b = -\frac{۳۰ - ۱۰}{۲} Sin\,(۲ \times ۲۲/۵)° + ۲۰ \, Cos\,(۲ \times ۲۲/۵)° = ۷/۰۷ \, MPa$$

$$\theta = ۲۲/۵$$

۹-۹. با استفاده از روابط به دست آمده برای تنشهای اصلی، تنشهای اصلی و صفحات اصلی را برای جزء سطحی که بر آن تنشهای زیر تأثیر می‌کنند، به دست آورید و نتایج را به طور ترسیمی در روی جزء سطح مربوط به تنشهای اصلی، نمایش دهید.

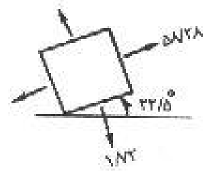
$\sigma_x = +۵۰\,MPa$ و $\sigma_y = +۱۰\,MPa$ و $\tau = +۲۰\,MPa$

از قرارداد علامت شکل ۹-۴ استفاده نمایید.

$$\tan ۲\theta_P \frac{\tau}{\frac{۱}{۲}(\sigma_x - \sigma_y)} = \frac{۲۰}{\frac{۱}{۲}(۵۰ - ۱۰)} = \frac{+۴۰}{+۴۰} = ۱ \Rightarrow ۲\theta_p = ۴۵ \rightarrow \theta_P = ۲۲/۵°$$

$$\sigma_{۱,۲} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲}\right)^۲ + \tau^۲} = \frac{۵۰ + ۱۰}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{۵۰ - ۱۰}{۲}\right)^۲ + ۲۰^۲} = ۳۰ \pm ۲۸/۲۸$$

$$\Rightarrow \sigma_۱ = ۵۸/۲۸\,MPa \qquad \sigma_۲ = ۱/۷۲\,MPa$$



۹-۱۰. مسأله ۹-۹ را با استفاده از داده‌های زیر مجدداً حل نمایید:

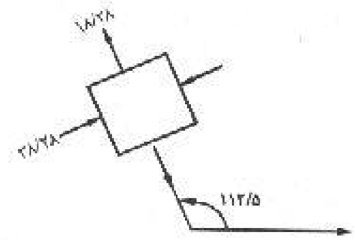
$\sigma_x = -۳۰\,MPa$ و $\sigma_y = +۱۰\,MPa$ و $\tau = -۲۰\,MPa$

$$\tan ۲\theta_p = \frac{-۲۰}{\frac{۱}{۲}(-۳۰ - ۱۰)} = \frac{-۴۰}{-۴۰} = +۱ \Rightarrow ۲\theta_p = ۱۸۰ + ۴۵ = ۲۲۵° \rightarrow \theta_p = ۱۱۲/۵°$$

$$\sigma_{۱,۲} = \frac{-۳۰ + ۱۰}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{-۳۰ - ۱۰}{۲}\right)^۲ + ۲۰^۲} = -۱۰ \pm ۲۸/۲۸$$

$$\sigma_۱ = ۱۸/۲۸\,MPa$$

$$\sigma_۲ = -۳۸/۲۸\,MPa$$

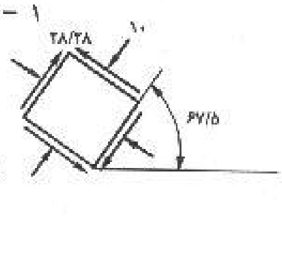


۹-۱۱. با استفاده از روابط به دست آمده برای تنش برشی حداکثر، تنش برشی حداکثر و صفحات مربوطه و تنشهای قائم همراه با آن را برای داده‌های مسأله ۹-۱۰ به‌دست آورید و نتایج را به طور ترسیمی در روی جزء سطح مربوط به تنش برشی حداکثر نشان دهید.

$$\tan ۲\theta_s = \frac{-\frac{۱}{۲}(\sigma_x - \sigma_y)}{\tau} = \frac{-\frac{۱}{۲}(-۳۰ - ۱۰)}{-۲۰} \frac{۴۰}{-۴۰} = -۱$$

$$\Rightarrow ۲\theta_s = ۱۸۰ - ۴۵ = ۱۳۵° \rightarrow \theta_s = ۶۷/۵°$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲}\right)^۲ + \tau^۲} = \sqrt{\left(\frac{-۳۰ - ۱۰}{۲}\right)^۲ + ۲۰^۲} = ۲۸/۲۸\,MPa$$



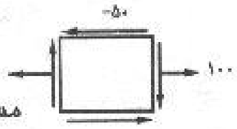
تنش نرمال همراه تنش برشی:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-30 + 10}{2} = -10\, MPa$$

۹-۱۲ تا ۹-۱۵. داده‌های مسائل ۹-۱۲ تا ۹-۱۵ از قرارداد علامت شکل ۹-۴ تبعیت می‌کنند. در هر حالت داده‌ها را در روی یک جزء سطح کوچک نشان دهید. سپس با استفاده از روابط به دست آمده برای تنشهای اصلی و تنش برشی حداکثر؛

(الف) تنشها و صفحات اصلی را به دست آورید و نتایج را به صورت ترسیمی در روی جـزء سطح مربوط به تنشهای اصلی نشان دهید.

(ب) تنش برشی حداکثر و صفحات مربوط و تنشهای قائم همراه با آن را به دست آورده و نتایج را به صورت ترسیمی در روی جزء سطح مربوط به تنشهای اصلی نشان دهید.

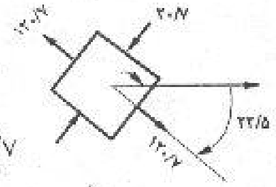


مسأله ۹-۱۲

$$\sigma_x = +100\, MPa \quad و \quad \sigma_y = 0 \quad و \quad \tau = -50\, MPa$$

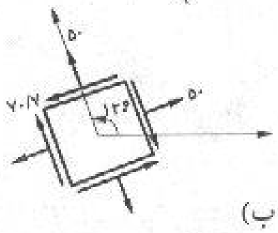
الف)

$$2\theta_p = Arc\tan \frac{-50}{\frac{1}{2}(100 - 0)} = \frac{-100}{100} = -1 \rightarrow 2\theta_p = -45° \rightarrow \theta_p = -22/5°$$



$$\sigma_{1,2} = \frac{100 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{100 - 0}{2}\right)^2 + (-50)^2} = 50 \pm 70/7$$

$$\sigma_1 = 120/7\, MPa \qquad \sigma_2 = -20/7\, MPa$$



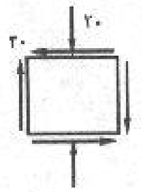
ب)

$$2\theta_s = Arc\tan \frac{-\frac{1}{2}(100 - 0)}{-50} = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow 2\theta_s = 180 + 45 \Rightarrow \theta_s = 112/5°$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{100}{2}\right)^2 + 50^2} = 70/7\, MPa \quad و \quad \sigma = \frac{100 + 0}{2} = 50\, MPa$$

مسأله ۹-۱۳:

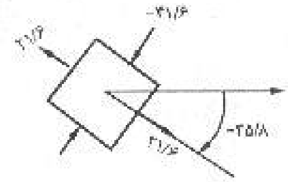
$$\sigma_x = 0، \quad و \quad \sigma_y = -20\, MPa \quad و \quad \tau = -30\, MPa$$



الف)

$$\tan ۲\theta_p = \frac{-۳۰}{\frac{۱}{۲}(۰ + ۲۰)} = -۳ \rightarrow ۲\theta_p = -۷۱/۵^\circ \rightarrow \theta_۱ = -۳۵/۸^\circ$$

$$\sigma_{۱,۲} = \frac{۰ - ۲۰}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{۰ - ۲۰}{۲}\right)^۲ + (-۳۰)^۲} = -۱۰ \pm ۳۱/۶$$

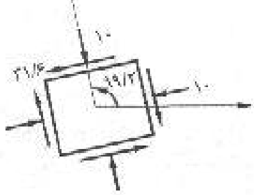


$$\rightarrow \sigma_۱ = +۲۱/۶\,MPa \qquad \sigma_۲ = -۴۱/۶$$

ب)

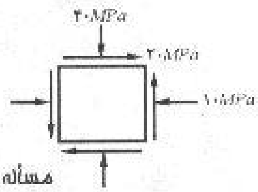
$$\tan ۲\theta_s = \frac{-\frac{۱}{۲}(۰ + ۲۰)}{-۳۰} = \frac{-۱}{-۳} \rightarrow ۲\theta_s = ۱۸۰ + ۱۸/۴ \rightarrow \theta_s = ۹۹/۲^\circ$$

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{۲۰}{۲}\right)^۲ + (-۳۰)^۲} = ۳۱/۶\,MPa$$



$$\sigma = \frac{۰ - ۲۰}{۲} = -۱۰\,MPa$$

مسأله ۹-۱۴: $\tau = +۲۰\,MPa$ و $\sigma_y = -۴۰\,MPa$ و $\sigma_x = -۱۰\,MPa$

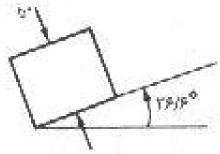


مسأله ۹-۱۴

الف)

$$\tan ۲\theta_p = \frac{۲۰}{\frac{۱}{۲}(-۱۰ + ۴۰)} = \frac{۴}{۳} \rightarrow \theta_p = ۲۶/۶^\circ$$

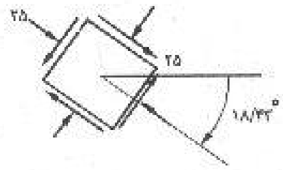
$$\sigma_{۱,۲} = \frac{-۱۰ - ۴۰}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{-۱۰ + ۴۰}{۲}\right)^۲ + ۲۰^۲}$$



$$= -۲۵ \pm ۲۵ \begin{cases} \sigma_۱ = ۰\,MPa \\ \sigma_۲ = -۵۰\,MPa \end{cases}$$

ب)

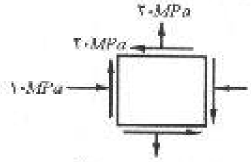
$$\tan ۲\theta_s = \frac{-\frac{۱}{۲}(-۱۰ + ۴۰)}{۲۰} = \frac{-۳}{۴} \rightarrow ۲\theta_s = -۳۶/۸۷ \rightarrow \theta_s = -۱۸/۴۳$$



$$\tau = \sqrt{\left(\frac{-۱۰ + ۴۰}{۲}\right)^۲ + ۲۰^۲} = ۲۵\,MPa$$

$$\sigma = \frac{-۱۰ - ۴۰}{۲} = -۲۵\,MPa$$

مسأله ۹-۱۵: $\tau = -20\,MPa$ و $\sigma_y = +20\,MPa$ و $\sigma_x = -10\,MPa$

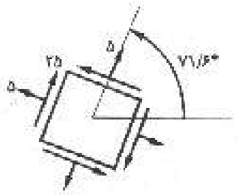


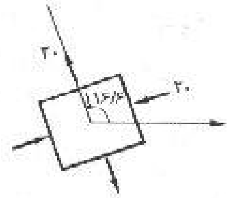
الف) $\tan 2\theta_p = = \dfrac{-20}{\frac{1}{2}(-10-20)} = \dfrac{-4}{-3} \Rightarrow 2\theta_p = 180 + 53/1 \rightarrow \theta_p = 116/6°$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-10+20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10-20}{2}\right)^2 + 20^2} = 5 \pm 25 \qquad \begin{cases} \sigma_1 = 30\,MPa \\ \sigma_2 = -20\,MPa \end{cases}$$

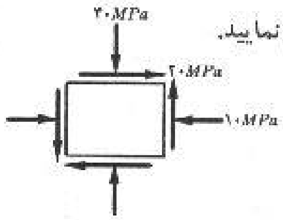
ب) $\tan 2\theta_s = \dfrac{\frac{-1}{2}(-10-20)}{-20} = \dfrac{3}{-4} \rightarrow 180 - 36/87 \Rightarrow \theta_s = 71/6$

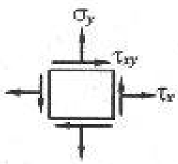
$$\tau_m = \sqrt{\left(\frac{-10-20}{2}\right)^2 + 20^2} = 25\,MPa \quad \text{و} \quad \sigma = \frac{-10+20}{2} = 5\,MPa$$

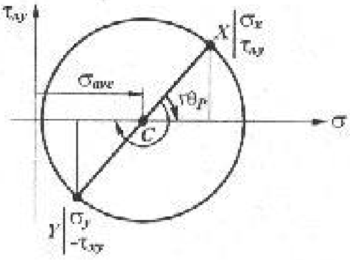




۹-۱۶. با استفاده از دایرهٔ تنش مور، قسمت الف مسأله ۹-۱۴ را حل نمایید.



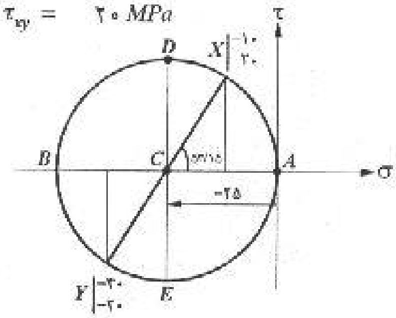




$\sigma_x = -10\,MPa$

$\sigma_y = -40\,MPa$

$\tau_{xy} = 20\,MPa$



پس از ترسیم محورهای عمود بر هم و مشخص کردن جهت مثبت تنش نرمال و تنش برشی بر روی آنها؛ محل مرکز دایره را تعیین می‌کنیم.

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-10-40}{2} = -25$$

در گام بعد محل نقاط (σ_x و τ_{xy}) X و (σ_y و $-\tau_{xy}$) Y مشخص می‌شوند:

X (−۱۰ و ۲۰) و Y (−۴۰ و −۲۰)

اگر دو نقطه X و Y را به‌یکدیگر وصل کنیم خط واصل باید از نقطه c که همان مرکز دایره است بگذرد.
حال دایره‌ای به مرکز C و شعاع CX ترسیم می‌نماییم که این دایره از نقطه Y نیز عبور خواهد کرد.
اینک با در دست داشتن دایره مور برای المان مربوطه، اطلاعات مورد نیاز مثل مقادیر تنشهای اصلی، تنش برشی ماکزیمم، زوایای اصلی و سایر موارد را می‌توان هم از روش محاسباتی و هم بوسیله اندازه‌گیری از روی دایره بدست آورد. البته برای استفاده از روش اندازه‌گیری باید در ترسیم، دقت کافی به‌عمل آید.

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲}\right)^۲ + \tau_{xy}^۲} = \sqrt{\left(\frac{-۱۰ + ۴۰}{۲}\right)^۲ + ۲۰^۲} = ۲۵$$

تنشهای اصلی:

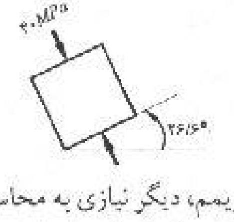
$$\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R = -۲۵ + ۲۵ = ۰$$

$$\sigma_{min} = \sigma_{ave} - R = -۲۵ - ۲۵ = -۵۰\, MPa$$

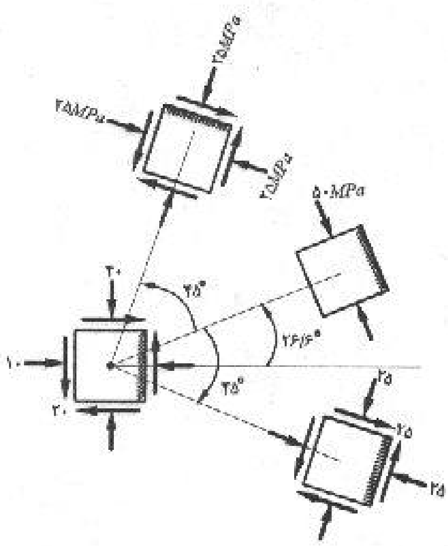
صفحات اصلی:

$$tan\ ۲\theta_p = \frac{۲\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{۲ \times ۲۰}{-۱۰ + ۴۰} = \frac{+۴}{+۳} \xrightarrow{\text{ناحیه اوّل}} ۲\theta_p = ۵۳/۱۵ \rightarrow \theta_p = ۲۶/۶°$$

دورانی که X را روی A منطبق می‌کند در جهت عقربه‌های ساعت می‌باشد، بنابراین طبق قراردادی که در درس به آن اشاره شد، اگر المان را به اندازه θ در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخانیم، به موقعیتی می‌رسیم که در آن تنش برشی صفر است و σ_x برابر σ_{Max} می‌شود. همچنین چون با این دوران نقطه Y روی نقطه B قرار می‌گیرد، σ_y برابر σ_{min} خواهد بود. پس برای رسیدن به موقعیتی که در آن تنشهای اصلی رخ می‌دهند، کافیست المان را به اندازه ۲۶/۶° در خلاف جهت عقربه‌های ساعت بچرخانیم.



برای بدست آوردن صفحات تنش برشی ماکزیمم، دیگر نیازی به محاسبه زاویه نیست زیرا همانگونه که قبلاً گفته شد، صفحات تنش برشی ماکزیمم با صفحات اصلی همواره زاویه ۴۵° می‌سازند. بنابراین برای بدست آوردن موقعیت المان در حالتی که تنش برشی ماکزیمم رخ می‌دهد، کافیست المان مربوط به تنشهای اصلی را ۴۵° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم. از روی دایره،



مور به‌وضوح مشخص است که با این عمل به نقطه D می‌رسیم که همان موقعیت تنش برشی ماکزیمم (با علامت مثبت) می‌باشد.
مقدار تنش برشی ماکزیمم به اندازهٔ شعاع دایره مور می‌باشد:

$\tau_{max} = R$

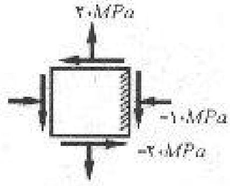
در این مسأله $R = ۲۵$ بوده و در نتیجه:

$\tau_{max} = ۲۵ MPa$

اگر المان را از حالت تنشهای اصلی، به اندازه ۴۵° خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخانیم در حقیقت روی دایره مور به نقطه E رسیده‌ایم و همانگونه که مشخص است در این موقعیت، المان باز هم در حالت تنش برشی ماکزیمم قرار دارد ولی علامت آن روی وجه مورد بررسی منفی می‌باشد و طبق قرارداد، جهت آن روی المان باید بگونه‌ای باشد که المان را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخاند. تفاوت این دو حالت در شکل کاملاً مشخص می‌باشد.
با توجه به مطالب فوق θ_s را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$\theta_s = \theta_p - ۴۵°$

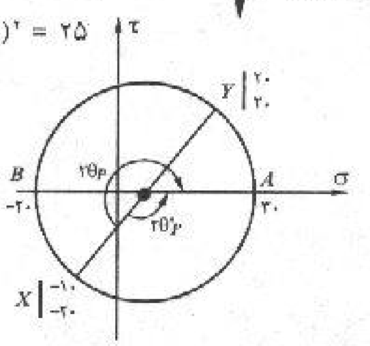
۹-۱۷. با استفاده از دایرهٔ تنش مور، قسمت الف مسأله ۹-۱۵ را حل نمایید.



$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} = \frac{-۱۰ + ۲۰}{۲} = ۵ MPa$

$X = (-۱۰ \text{ و } -۲۰)$ ، $Y (۲۰ \text{ و } ۲۰)$

$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲}\right)^۲ + \tau^۲_{xy}} = \sqrt{\left(\frac{-۱۰ - ۲۰}{۲}\right)^۲ + (-۲۰)^۲} = ۲۵$

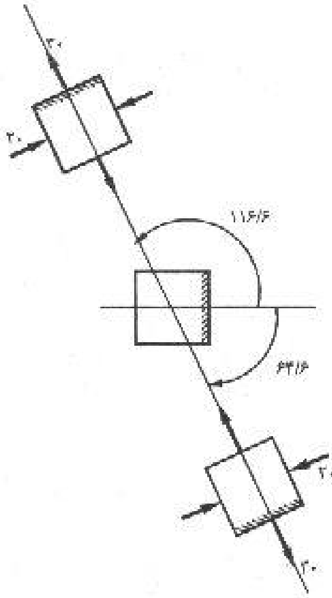


$\sigma_۱ = ۵ + ۲۵ = ۳۰ MPa$ و $\sigma_۲ = ۵ - ۲۵ = -۲۰ MPa$

$tan\ ۲\theta_p = \frac{۲\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{۲ \times (-۲۰)}{-۳۰} = \frac{-۴}{-۳}$

$\xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} ۲\theta_p = ۱۸۰° + ۵۳/۱° \rightarrow \theta_p = ۱۱۶/۶°$

چون وتر XY با دوران به اندازه $۲\theta_p$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، روی محور σ قرار می‌گیرد، خود المان را به اندازه θ در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا صفحات تنشهای

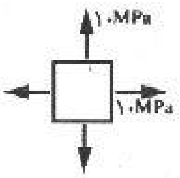


اصلی مشخص شوند. با این عمل نقطه X به نقطه A منتقل می‌شود؛ بنابراین وجهی که تنش نرمال روی آن $-۱۰ MPa$ بوده است اینک تحت تنش نرمال $۳۰ MPa$ قرار می‌گیرد. بهمین ترتیب، تنش نرمال در وجه عمود بر آن از $+۲۰ MPa$ به $-۲۰ MPa$ می‌رسد. البته می‌توان با دوران قطر XY در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت هم به نقطه A رسید که در این صورت:

$$۲\theta'_p = ۱۸۰ - ۵۳/۱ = ۱۲۶/۹$$
$$\rightarrow \theta'_p = ۶۴/۶$$

در هر دو حالت نتیجه یکسان است.

۹-۱۸ تا ۹-۲۱. دایرهٔ تنش مور را برای هر یک از حالات تنش نشان داده شده در شکل رسم نمایید. با استفاده از این دوایر، (الف) تنشها و صفحات اصلی را به دست آورید و نتایج را به صورت ترسیمی در روی جزء سطح مربوطه نشان دهید. (ب) تنشهای برشی حداکثر و صفحات مربوطه و تنشهای قائم همراه با آن را به دست آورید و نتایج را به صورت ترسیمی در روی جزء سطح مربوطه به تنش برشی حداکثر، نشان دهید.



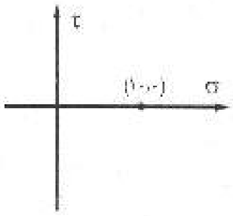
مسئله ۹-۱۸

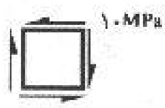
$\sigma_x = ۱۰ MPa$ و $\sigma_y = ۱۰ MPa$ و $\tau_{xy} = ۰$

مرکز دایره: $\sigma_{ave} = \frac{۱۰ + ۱۰}{۲} = ۱۰ MPa$

$X(۱۰ \text{ و } ۰)$ و $Y(۱۰ \text{ و } ۰)$ $\quad R = \sqrt{\left(\frac{۱۰ - ۱۰}{۲}\right)^۲ + ۰^۲} = ۰$

ملاحظه می‌شود که نقاط X و Y و همچنین مرکز دایره بر یکدیگر منطبق می‌شوند. یعنی در این حالت دایره مور به یک نقطه تبدیل می‌شود و همانگونه که می‌بینید شعاع بدست آمده برای دایره هم صفر شده و این مطلب را تأیید می‌کند.





مسأله ۹-۱۹

$\sigma_x = ۰$ و $\sigma_y = ۰$ و $\tau_{xy} = -۱۰\ MPa$

$\sigma_{ave} = ۰$

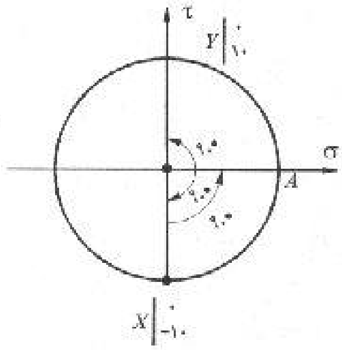
$X(۰ \text{ و } -۱۰)$ و $Y(۰ \text{ و } +۱۰)$

$tan\ ۲\theta = \infty \rightarrow ۲\theta = -۹۰ \rightarrow \theta = -۴۵^\circ$

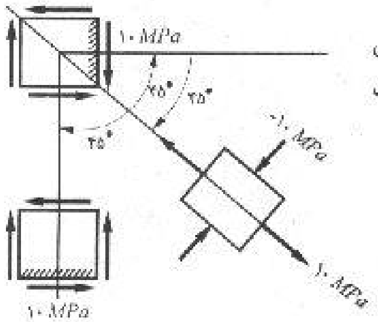
$R = \sqrt{۰^۲ + (-۱۰)^۲} = ۱۰$

$\sigma_۱ = ۰ + ۱۰ = ۱۰\ MPa$

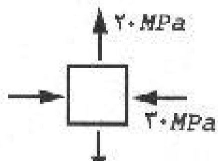
$\sigma_۲ = ۰ - ۱۰ = -۱۰\ MPa$



چون روی دایره خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران صورت گرفته، المان را در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم.



زوایای تنش برشی ماکزیمم به اندازهٔ ۴۵° با زوایای تنشهای اصلی اختلاف دارند یعنی موقعیت اولیه المان هم در حالت تنش برشی ماکزیمم می‌باشد.



مسأله ۹-۲۰

$\sigma_x = -۳۰\ MPa \qquad \sigma_y = ۲۰\ MPa$

$\sigma_{ave} = \frac{-۳۰ + ۲۰}{۲} = -۵MPa \qquad C(-۵ \text{ و } ۰)$

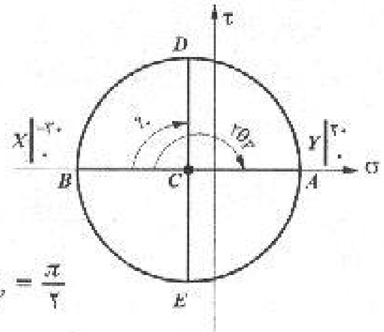
$X(-۳۰ \text{ و } ۰)$ و $Y(۲۰ \text{ و } ۰)$

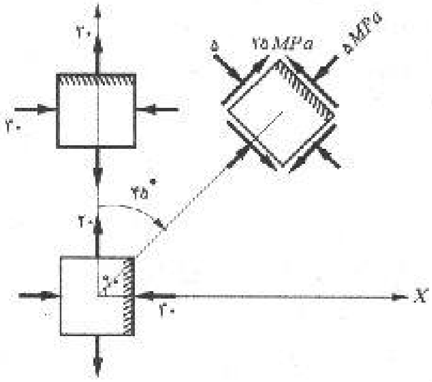
$R = \sqrt{\left(\frac{-۳۰ - ۲۰}{۲}\right)^۲ + ۰^۲} = ۲۵$

$\sigma_۱ = -۵ + ۲۵ = ۲۰\ MPa$

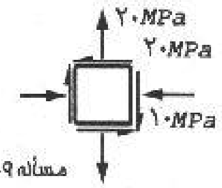
$\sigma_۲ = -۵ - ۲۵ = -۳۰\ MPa$

$tan\ ۲\theta_p = \frac{۲\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{۰}{-۵۰} \rightarrow ۲\theta_p = \pi \rightarrow \theta_p = \frac{\pi}{۲}$





با دوران قطر XY در جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه ۹۰°، نقطه X به نقطه D منتقل می‌شود که در این وضعیت مقدار تنش نرمال $5MPa$+ بوده و تنش برشی مقدار حداکثر خود را ($25MPa$) با علامت مثبت دارا می‌باشد. در وجه عمود بر آن که نقطه Y نشان‌دهنده آن است، با انتقال به E مقادیر تنش نرمال و برشی به‌ترتیب $5MPa$− و $25MPa$− می‌باشند.

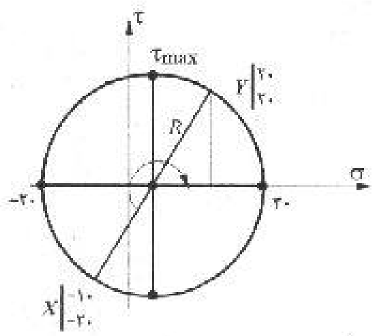


مسئله ۹-۲۱

$\sigma_x = -10\ MPa \qquad \sigma_y = 20\ MPa \qquad \tau_{xy} = -20\ MPa$

$$\sigma_{ave} = \frac{-10 + 20}{2} = 5\ MPa$$

$X(-10 \text{ و } -20) \quad \text{و} \quad Y(20 \text{ و } 20)$



$$R = \sqrt{\left(\frac{-10 - 20}{2}\right)^2 + (-20)^2} = 25$$

$$\sigma_1 = 5 + 25 = 30\ MPa$$

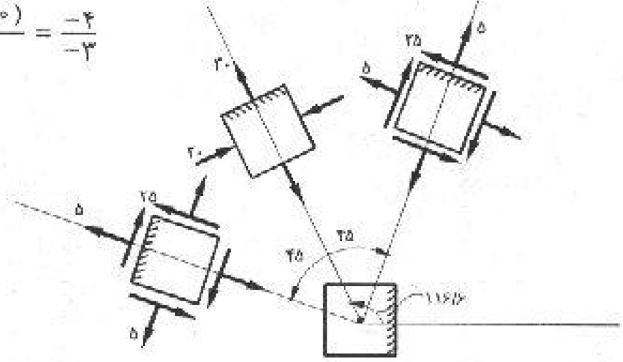
$$\sigma_2 = 5 - 25 = -20\ MPa$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times (-20)}{-30} = \frac{-4}{-3}$$

$$\rightarrow 2\theta_p = 180 + 53/1$$

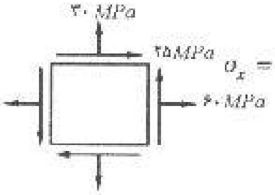
$$\rightarrow \theta_p = 116/6^\circ$$

$$\theta_s = \theta_p \pm 45$$

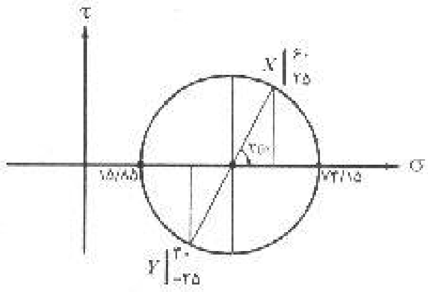


۹-۲۲ تا ۹-۲۸. داده‌های مسائل ۹-۲۲ تا ۹-۲۸، روی یک جزء سطح نمایش دهید. سپس با استفاده از دایرهٔ مور و اعمال مثلثاتی، (الف) تنشهای اصلی و صفحات اصلی را به دست آورید و نتایج را به طور ترسیمی در روی جزء سطح مربوطه نشان دهید. (ب) تنش برشی حداکثر و صفحات

مربوطه و تنشهای قائم همراه با آن را به دست آورده و نتایج را به طور ترسیمی در روی جـزء سطح مربوطه نشان دهید. دادههای مسائل به قرار زیر میباشند:



مسأله ۹-۲۲: $\tau = +25MPa$ و $\sigma_y = +30MPa$ و $\sigma_x = +60MPa$



$$center = \frac{60 + 30}{2} = 45 \qquad C\,(45 \text{ و } 0)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{60 - 30}{2}\right)^2 + 25^2} = 29.15$$

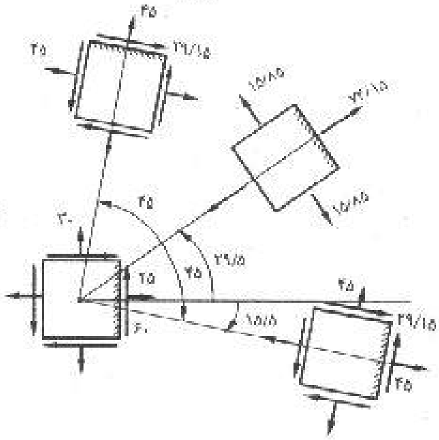
$$\sigma_1 = 45 + 29.15 = 74.15MPa$$

$$\sigma_2 = 45 - 29.15 = 15.85MPa$$

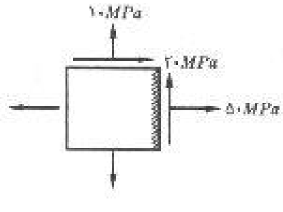
$$2\theta_p = tan^{-1}\left(\frac{25}{60 - 45}\right) = 59^\circ \Rightarrow \theta_p = 29.5^\circ$$

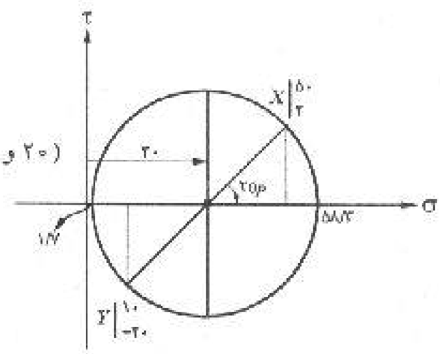
$$\tau_{max} = R = 29.15MPa \quad \text{و} \quad \sigma = 45MPa$$

$$\theta_s = 29.5 - 45 = -15.5^\circ$$



مسألهٔ ۹-۲۳: مشابه مسأله ۹-۹





$$center = \frac{50 + 10}{2} = 30 \quad X(50 \text{ و } 20) \quad Y(10 \text{ و } 20)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{50 - 10}{2}\right)^2 + 20^2} = 28.3$$

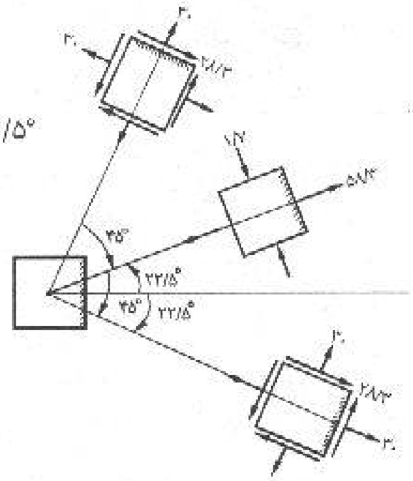
$$\sigma_1 = 30 + 28.3 = 58.3$$

$\sigma_۲ = ۳۰ - ۲۸/۳ = ۱/۷$

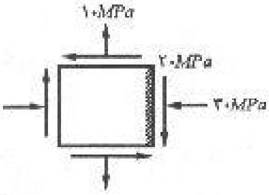
$۲\theta_p = tan^{-1}\left(\frac{۲۰}{۵۰ - ۳۰}\right) \Rightarrow ۲\theta_p = ۴۵° \rightarrow \theta_p = ۲۲/۵°$

$\tau_{max} = R = ۲۸/۳\, MPa$

$\theta_s = \theta_p - ۴۵ = -۲۲/۵$

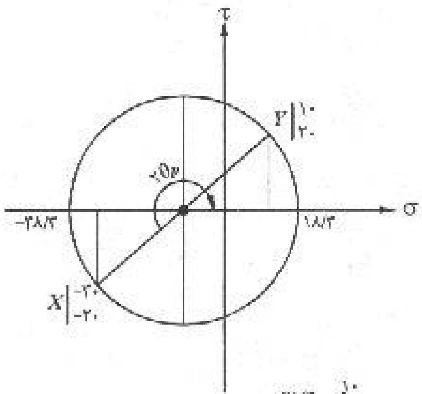


مسألهٔ ۹-۲۴. مشابه مسأله ۹-۱۰



$center = \frac{-۳۰ + ۱۰}{۲} = -۱۰$

$X(-۳۰ \text{ و } -۲۰) \quad Y(۱۰ \text{ و } ۲۰)$



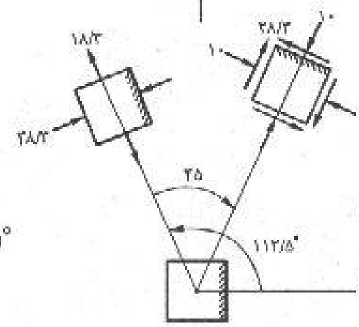
$R = \sqrt{\left(\frac{-۳۰ - ۱۰}{۲}\right)^۲ + ۲۰^۲} = ۲۸/۳$

$\sigma_۱ = -۱۰ + ۲۸/۳ = ۱۸/۳\, MPa$

$\sigma_۲ = -۱۰ - ۲۸/۳ = -۳۸/۳\, MPa$

$tan\ ۲\theta_p = \frac{-۲۰}{-۳۰ - (-۱۰)} = \frac{-۱}{-۱} = ۱$

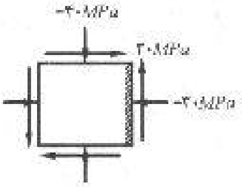
$\rightarrow ۲\theta_p = ۱۸۰° + ۴۵° \rightarrow ۲\theta_p = ۲۲۵ \rightarrow \theta_p = ۱۱۲/۵°$



$\tau_{max} = R = ۲۶/۳\, MPa$

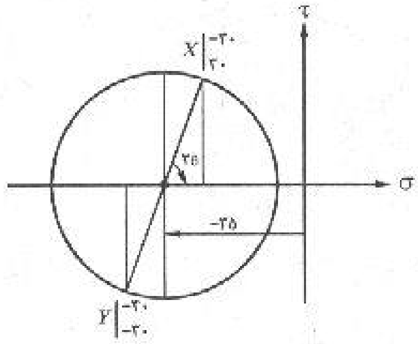
$\theta_s = ۱۱۲/۵ - ۴۵ = ۶۷/۵$

مسأله ۹-۲۵. $\sigma_x = -۳۰\, MPa$ و $\tau = +۳۰\, MPa$ و $\sigma_y = -۴۰\, MPa$ و



$$center = \frac{-۳۰ - ۴۰}{۲} = -۳۵$$

$$X(-۳۰ \text{ و } +۳۰) \quad \text{و} \quad Y(-۴۰ \text{ و } -۳۰)$$

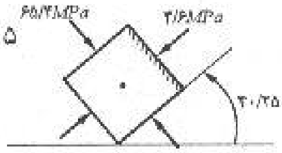


$$R = \sqrt{\left(\frac{-۳۰ + ۴۰}{۲}\right)^۲ + ۳۰^۲} = ۳۰/۴$$

$$\sigma_۱ = -۳۵ + ۳۰/۴ = -۴/۶ \; MPa$$

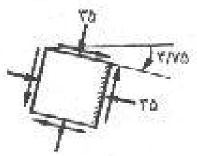
$$\sigma_۲ = -۳۵ + ۳۰/۴ = -۶۵/۴ \; MPa$$

$$\tan ۲\theta_p = \frac{۳۰}{-۳۰ - (-۳۵)} \Rightarrow ۲\theta_p = ۸۰/۵ \rightarrow \theta_p = ۴۰/۲۵$$



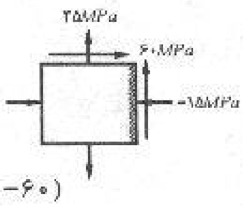
$$\tau_{max} = R = ۳۰/۴ \, MPa \quad \text{و} \quad \sigma = -۳۵ \, MPa$$

$$\theta_s = ۴۰/۲۵ - ۴۵ = -۴/۷۵$$



مسأله ۹-۲۶: $\sigma_x = -۱۵MPa$ و $\sigma_y = +۳۵MPa$ و $\tau = +۶۰ \, MPa$

$$center = \frac{-۱۵ + ۳۵}{۲} = ۱۰ \qquad C(۱۰ \text{ و } ۰)$$

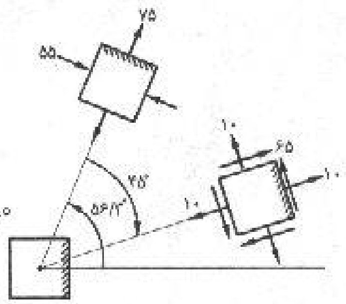


$$R = \sqrt{\left(\frac{-۱۵ - ۳۵}{۲}\right)^۲ + ۶۰^۲} = ۶۵ \qquad X(-۱۵ \text{ و } ۶۰) \qquad Y(۳۵ \text{ و } -۶۰)$$

$$\sigma_۱ = ۱۰ + ۶۵ = ۷۵ \, MPa$$

$$\sigma_۲ = ۱۰ - ۶۵ = -۵۵ \, MPa$$

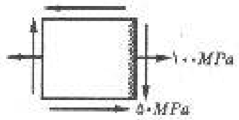
$$\tan ۲\theta_p = \frac{۶۰}{۱۰ - (-۱۵)} = \frac{۶۰}{۲۵} \Rightarrow ۲\theta_p = ۱۸۰° - ۶۷/۴°$$

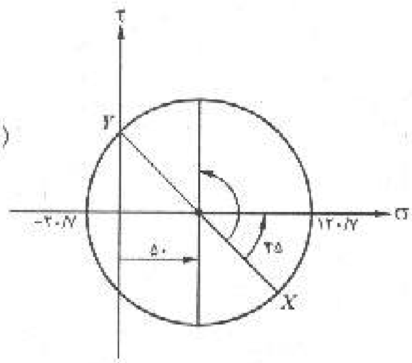


$$\rightarrow ۲\theta_p = ۱۱۲/۶° \rightarrow \theta_p = ۵۶/۳°$$

$$\theta_s = \theta_p - ۴۵° = ۱۱/۳°$$

مسأله ۹-۲۷: $\tau = -۵۰ MPa$ و $\sigma_y = ۰$ و $\sigma_x = +۱۰۰ MPa$



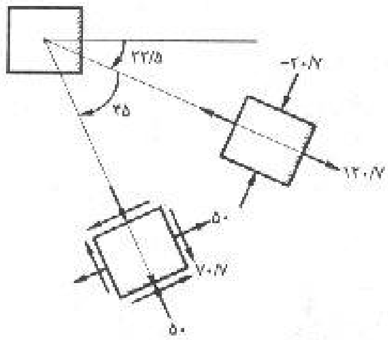


$$center = \frac{۱۰۰ + ۰}{۲} = ۵۰ \qquad C\,(۵۰ \text{ و } ۰)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{۱۰۰ - ۰}{۲}\right)^۲ + (۵۰)^۲} = ۷۰/۷$$

$X(۱۰۰ \text{ و } -۵۰)$ و $Y(۰ \text{ و } ۵۰)$

$$\sigma_۱ = ۵۰ + ۷۰/۷ = ۱۲۰/۷$$
$$\sigma_۲ = ۵۰ - ۷۰/۷ = -۲۰/۷$$

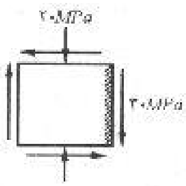


$$\tan ۲\theta_p = \frac{۲ \times (-۵۰)}{۱۰۰ - ۰} = \frac{-۱}{۱} = -۱$$

$$۲\theta_p = -۴۵^\circ \rightarrow \theta_p = -۲۲/۵^\circ$$

$$\theta_s = \theta_p - ۴۵ = -۶۷/۵^\circ$$

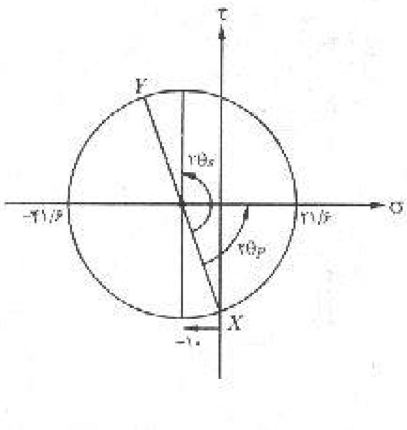
مسأله ۹-۲۸: $\tau = -۳۰ MPa$ و $\sigma_y = -۲۰ MPa$ و $\sigma_x = ۰$



$$center = \frac{۰ + (-۲۰)}{۲} = -۱۰ \qquad C\,(-۱۰ \text{ و } ۰)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{۰ + ۲۰}{۲}\right)^۲ + (-۳۰)^۲} = ۳۱/۶ \qquad X(۰ \text{ و } -۳۰) \text{ و } Y(-۲۰ \text{ و } ۳۰)$$

$$\sigma_۱ = -۱۰ + ۳۱/۶ = ۲۱/۶$$

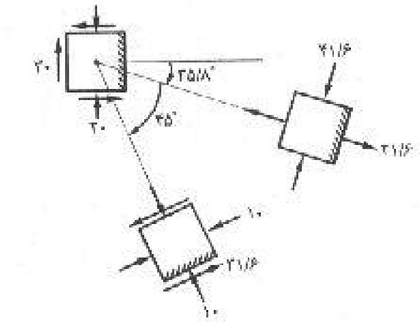


$$\sigma_۲ = -۱۰ - ۳۱/۶ = -۴۱/۶$$

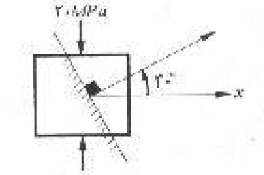
$$\tan ۲\theta_p = \frac{۲ \times (-۳۰)}{۰ + ۲۰} = \frac{-۶۰}{۲۰} = -۳$$

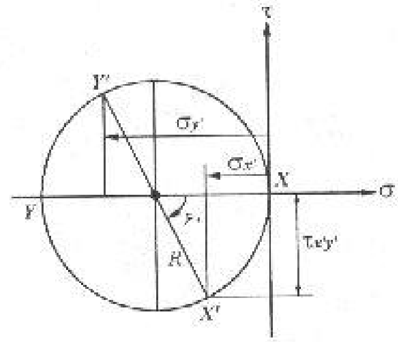
$$\rightarrow ۲\theta_p = -۷۱/۶^\circ \rightarrow \theta_p = -۳۵/۸^\circ$$

$$\theta_s = -۳۵/۸^\circ - ۴۵^\circ = -۸۰/۸^\circ$$



۹-۲۹. اگر $\sigma_x = \sigma_1 = ۰$ و $\sigma_y = \sigma_2 = -۲۰$ مگاپاسکال (نیوتن بر میلی‌مترمربع) باشند، با استفاده از دایرهٔ تنش مور، تنش را دو روی صفحه‌ای که توسط زاویه $\theta = +۳۰^\circ$ درجه تعریف می‌شوند، به دست آورید.



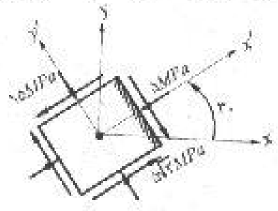


$$center = \frac{۰ - ۲۰}{۲} = -۱۰ \qquad C\,(-۱۰ \text{ و } ۰)$$

$$X(۰ \text{ و } ۰) \qquad Y\,(-۲۰ \text{ و } ۰)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{۰ + ۲۰}{۲}\right)^۲ + ۰^۲} = ۱۰$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود، المان در وضعیتی است که تنشهای اصلی بر آن اعمال می‌گردند و موقعیت نقطه X نشان‌دهنده وضعیت تنش روی وجه سمت راست المان می‌باشد. اگر بخواهیم وضعیت تنش را روی صفحه‌ای از المان که با زاویهٔ $+۳۰^\circ$ مشخص می‌شود تعیین کنیم، روی دایره، قطر XY را به اندازه -۶۰° دوران می‌دهیم.

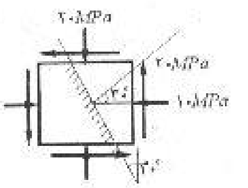


$$\sigma_x{}' = -R + R\ Cos\,۶۰ = -۱۰ + ۱۰ \times \frac{۱}{۲} = -۵MPa$$

$$\tau_{x'y'} = -R\ Sin\,۶۰ = -۵\sqrt{۳}$$

$$\sigma_y{}' = -R - R\ Cos\,۶۰ = -۱۰ - ۱۰ \times \frac{۱}{۲} = -۱۵MPa$$

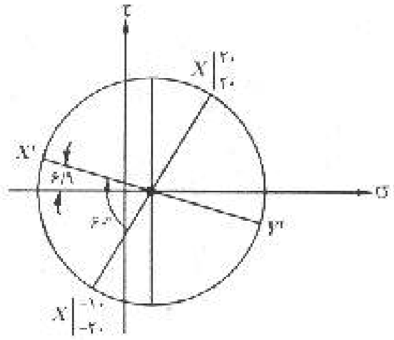
۹-۳۰. با استفاده از دایرهٔ تنش مور، برای داده‌های مسأله ۹-۲۱، تنش را در روی صفحه‌ای که با زاویه $\theta = ۳۰^\circ$ درجه مشخص می‌شود، به دست آورید.



$center = \frac{-۱۰ + ۲۰}{۲} = ۵ \qquad C\,(۵ \text{ و } ۰)$

$X\,(-۱۰ \text{ و } -۲۰) \qquad Y\,(۲۰ \text{ و } ۲۰)$

$R = \sqrt{\left(\frac{-۱۰ - ۲۰}{۲}\right)^۲ + (-۲۰)^۲} = ۲۵$



برای تعیین تنشها روی صفحه‌ای که با زاویه $+۳۰°$ مشخص می‌شود قطر xy را به اندازه $-۶۰°$ حول مرکز دایره دوران می‌دهیم.

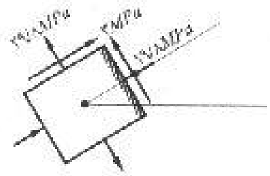
$\tan ۲\alpha_۰ = \frac{۲۰}{۱۰ + ۵} = \frac{۲۰}{۱۵} \rightarrow \alpha_۰ = ۵۳/۱$

$۲\alpha = ۶۰ - ۵۳/۱ = ۶/۹°$

$\sigma_{x'} = ۵ - ۲۵\ Cos\,۶/۹° = -۱۹/۸\,MPa$

$\tau_{x'y'} = ۲۵\ Sin\,۶/۹° = ۳\,MPa$

$\sigma_{y'} = ۵ + ۲۵\ Cos\,۶/۹° = ۲۹/۸\,MPa$



۹-۳۱. مسأله ۹-۳۰ را برای صفحه‌ای با $\theta = ۲۰°$ درجه مجدداً حل نمایید.

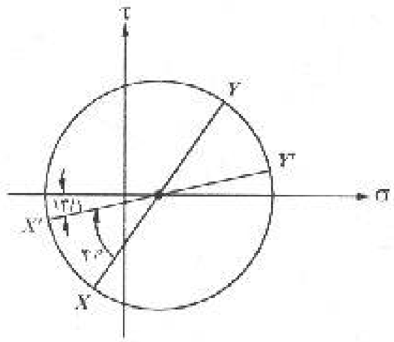
$۲\alpha_۰ = ۵۳/۱°$ از مسأله قبل:

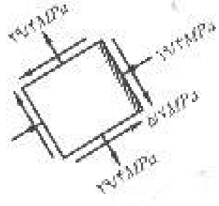
$۲\alpha = ۵۳/۱° - ۴۰° = ۱۳/۱°$

$\sigma_{x'} = ۵ - ۲۵\ Cos\ ۱۳/۱° = -۱۹/۴\,MPa$

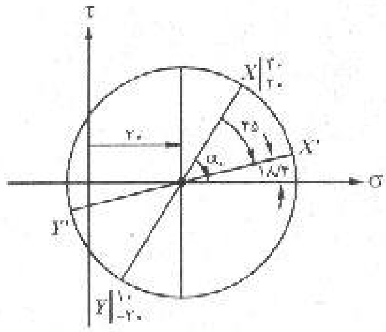
$\tau_{x'y'} = -۲۵\ Sin\ ۱۳/۱° = -۵/۷\,MPa$

$\sigma_{y'} = ۵ + ۲۵\ Cos\,۱۳/۱° = ۲۹/۴\,MPa$





۹-۳۲. با استفاده از دایرهٔ تنش مور، مسأله ۹-۳ را مجدداً حل نمایید.



$center = \frac{۳۰ + ۱۰}{۲} = ۲۰ \qquad C\,(۲۰ \text{ و } ۰)$

$X(۳۰ \text{ و } ۲۰) \quad \text{و} \quad Y(۱۰ \text{ و } -۲۰)$

$R = \sqrt{\left(\frac{۳۰ - ۱۰}{۲}\right)^۲ + ۲۰^۲} = ۲۲/۳۶$

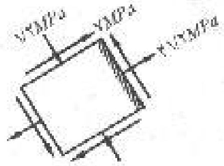
$\tan\alpha_۱ = \frac{۲۰}{۳۰ - ۲۰} = ۲ \rightarrow \alpha_۱ = ۶۳/۴^\circ$

$۲\alpha = ۶۳/۴^\circ - ۴۵^\circ = ۱۸/۴^\circ$

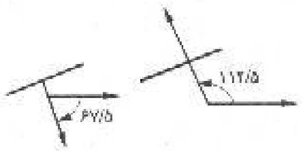
$\sigma_{x'} = ۲۰ + ۲۲/۳۶ \times Cos\ ۱۸/۴^\circ = ۴۱/۲\, MPa$

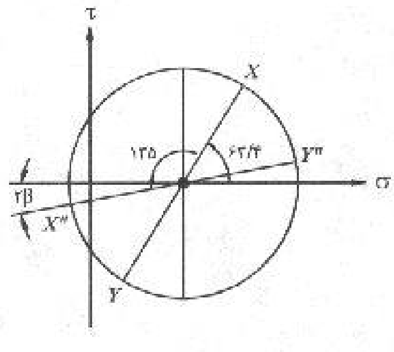
$\tau_{x'y'} = ۲۲/۳۶ \times Sin\ ۱۸/۴^\circ = ۷\, MPa$

$\sigma_{y'} = ۲۰ - ۲۲/۳۶ \times Cos\ ۱۸/۴^\circ = -۱/۲\, MPa$



صفحه دیگر نسبت به مبدأ زاویه ۱۱۲/۵+ یا ۶۷/۵- می‌سازد. اگر زاویه $۶۷/۵^\circ$- را در نظر بگیریم روی دایره باید به اندازه $(۲ \times ۶۷/۵ = ۱۳۵^\circ)$ قطر XY را دوران دهیم.



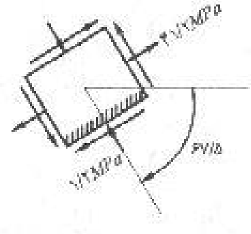


$۲\beta = ۶۳/۴ + ۱۳۵ - ۱۸۰ = ۱۸/۴^\circ$

$\sigma_{x'} = ۲۰ - ۲۲/۳۶ \times Cos\ ۱۸/۴^\circ = -۱/۲\, MPa$

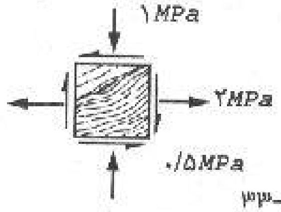
$\tau_{x'y'} = -۲۲/۳۶ \times Sin\ ۱۸/۴^\circ = -۷\, MPa$

$\tau_{y'} = ۲۰ + ۲۲/۳۶\ Cos\ ۱۸/۴^\circ = ۴۱/۲$



۹-۳۳. در یک نقطهٔ مشخص از یک عضو چوبی، حالت تنش مطابق شکل می‌باشد. الیاف چوب زاویه‌ای مساوی ۳۰°+ با محور xها می‌سازند. تنش برشی مجاز چوب در صفحاتی به موازات الیاف مساوی ۱ مگاپاسکال می‌باشد. آیا حالت تنش نشان داده شده، مجاز می‌باشد؟ مسأله را

هم از روش ترسیمی مور و هم با استفاده از معادلات حل نمایید.



مسأله ۹-۳۳

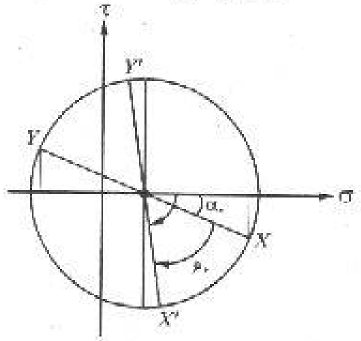
$$center = \frac{۲ - ۱}{۲} = ۰/۵ \qquad C\,(۰/۵ \text{ و } ۰)$$

$$X(۲ \text{ و } -۰/۵) \qquad Y(-۱ \text{ و } ۰/۵)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{۲ + ۱}{۲}\right)^۲ + ۰/۵^۲} = ۱/۵۸$$

$$\tan ۲\alpha_{\circ} = \frac{۰/۵}{۲ - ۰/۵} = \frac{۱}{۳} \rightarrow ۲\alpha_{\circ} = ۱۸/۴$$

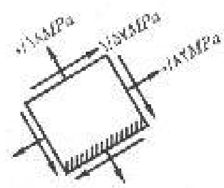
$$۲\alpha = ۱۸/۴^{\circ} + ۶۰^{\circ} = ۷۸/۴^{\circ}$$



$$\sigma_{x'} = ۰/۵ + ۱/۵۸ \ Cos \ ۷۸/۴ = ۰/۸۲ \, MPa$$

$$\tau_{x'y'} = -۱/۵۸ \ Sin \ ۷۸/۴ = -۱/۵۵ \, MPa$$

$$\sigma_{y'} = ۰/۵ - ۱/۵۸ \ Cos \ ۷۸/۴ = ۰/۱۸ \, MPa$$

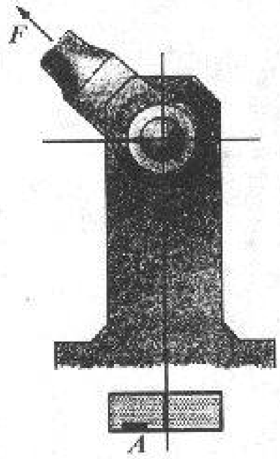


با توجه به اینکه تنش برشی در امتداد الیاف $۱/۵۷ MPa$ بوده و از تنش برشی مجاز بیشتر است در نتیجه حالت تنش نشان داده شده مجاز نمی‌باشد.

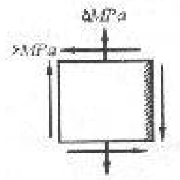
$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲} Sin \ ۲\theta + \tau_{xy} \ Cos \ ۲\theta$$

$$= -\frac{۲ + ۱}{۲} Sin \ ۶۰ + (-۰/۵) \ Cos \ ۶۰ = -۱/۵۵$$

۹-۳۴. مطابق شکل، توسط یک اتصال پنجه‌ای، نیروی P به لچکی نشان داده شده انتقال می‌یابد. محاسبات تنش لچکی، مؤلفه‌های تنش زیر را در روی جزء سطح A نشان می‌دهند، ۱۰ مگاپاسکال در اثر لنگر خمشی، ۱۵ مگاپاسکال در اثر نیروی محوری، ۶ مگاپاسکال در اثر نیروی برشی (توجه داشته باشید که اطلاعات داده شده فقط مقدار تنش‌ها را نشان می‌دهند، امتداد و جهت آنها باید با بررسی فیزیکی مسأله تعیین شوند). (الف) نتایج به دست آمده را در روی یک جزء سطح مجزا نمایش دهید. (ب) با استفاده از دایرهٔ تنش مور، تنشها و صفحات اصلی و تنش برشی حداکثر و صفحه مربوط و تنش قائم همراه با آن را به دست آورید و نتایج را به صورت ترسیمی نشان دهید.



مسئله ۹-۳۴



$\sigma = ۱۵ - ۱۰ = ۵ MPa$

$center = \frac{۰ + ۵}{۲} = ۲/۵ \qquad C\,(۲/۵ \text{ و } ۰)$

$X(۰ \text{ و } -۶) \quad \text{و} \quad Y(۵ \text{ و } ۶)$

$R = \sqrt{\left(\frac{۰ - ۵}{۲}\right)^۲ + ۶^۲} = ۶/۵$

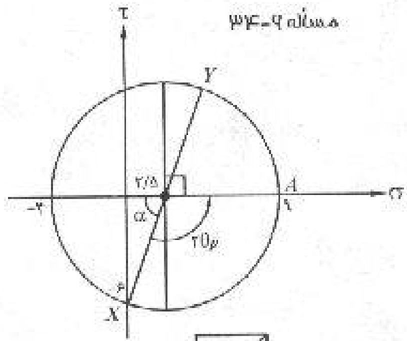
$\sigma_۱ = ۲/۵ + ۶/۵ = ۹ \ MPa$

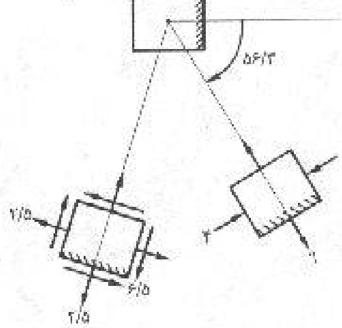
$\sigma_۲ = ۲/۵ - ۶/۵ = -۴ \ MPa$

$\tan\alpha = \frac{۶}{۲/۵} \Rightarrow \alpha = ۶۷/۴^\circ$

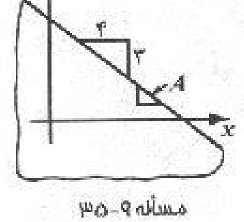
$۲\theta_p = ۱۸۰^\circ - ۶۷/۴^\circ = ۱۱۲/۶^\circ \to \theta_p = ۵۶/۳^\circ$

$\theta_s = ۵۶/۳ + ۴۵^\circ$



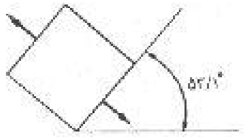


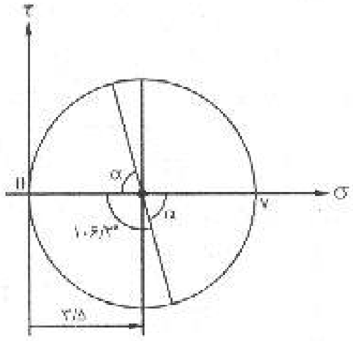
۹-۳۵. در نقطه جسم A در روی لبهٔ مورب و بارگذاری نشدهٔ یک ارتجاعی، حداکثر تنش برشی مساوی ۳/۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد. مطلوب است: (الف) تنشهای اصلی، (ب) حالت تنش در روی جزء سطحی که اضلاع آن به موازات محورهای x و y می‌باشند. نتایج را به صورت ترسیمی نشان دهید. (راهنمایی: حل مسأله با رسم دایرهٔ مور ساده‌تر می‌شود).



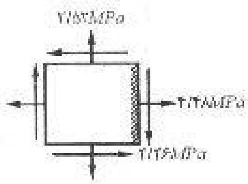
مسئله ۹-۳۵

$\tan\alpha = \frac{۴}{۳} \to \alpha = ۵۳/۱$





چون نقطه A روی لبه جسم قرار دارد و بار خارجی هم روی آن اعمال نمی‌شود، روی وجه بیرونی آن هیچگونه تنشی وجود ندارد؛ بنابراین روی ضلع مقابل آن هم تنشی موجود نخواهد بود و روی هیچیک از اضلاع هم تنش برشی وجود ندارد؛ یعنی فقط به‌موازات لبه، تنش بر المان وارد می‌شود. چون تنش برشی روی المان وارد نمی‌شود، المان در وضعیت تنشهای اصلی قرار دارد و با در نظر گرفتن اینکه $\sigma_۲ = ۰$ و $\tau_{max} = R = ۳/۵$ دایره مور به‌شکلی که ملاحظه می‌کنید خواهد بود.



$$\sigma_۱ = ۲R = ۷\,MPa$$

$$\sigma_x = \frac{۰ + ۷}{۲} + \frac{۰ - ۷}{۲} \times Cos\,(-۱۰۶/۲) + ۰ = ۴/۴۸\,MPa$$

$$\sigma_y = \frac{۰ + ۷}{۲} - \frac{۰ - ۷}{۲} \times Cos\,(-۱۰۶/۲) + ۰ = ۲/۵۲\,MPa$$

$$\tau_{xy} = -\frac{۰ - ۷}{۲}\,Sin\,(-۱۰۶/۲) + ۰ = -۳/۳۶\,MPa$$

البته با استفاده از دایره مور هم همین نتایج بدست خواهد آمد.

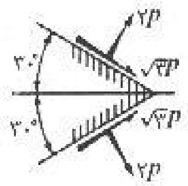
$$۲\theta = ۲(-۵۳/۱) = -۱۰۶/۲ \qquad \alpha = ۱۸۰ - ۱۰۶/۲ = ۷۳/۸$$

$$\sigma_x = \sigma_M + R\,Cos\alpha = ۳/۵ + ۳/۵\,Cos\,۷۳/۸ = ۴/۴۸\,MPa$$

$$\sigma_y = \sigma_M - R\,Cos\alpha = ۳/۵ - ۳/۵\,Cos\,۷۳/۸ = ۲/۵۲\,MPa$$

$$\tau_{xy} = -R\,Sin\alpha = -۳/۵\,Sin\,۷۳/۸ = -۳/۳۶$$

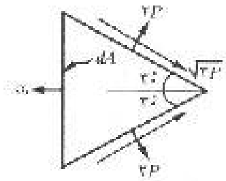
۹-۳۶. مقدار و امتداد تنشهای مؤثر بر دو صفحهٔ متقاطع در شکل نشان داده شده‌اند. مطلوب است تعیین امتداد و مقدار تنشهای اصلی در نقطهٔ تقاطع دو صفحه. نتایج را به صورت ترسیمی در روی جزء سطح مربوط به تنشهای اصلی نشان دهید.



مسأله ۹-۳۶

$$\sum F_x = ۰ : \sigma_۱ dA = ۲ \times (۲p\,sin\,۳۰ + \sqrt{۳}\,p\,Cos\,۳۰)\,dA \Rightarrow \sigma_۱ = ۵P$$

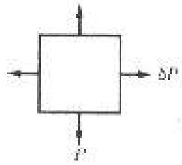
(با توجه به هندسه شکل سطوح هر سه وجه با یکدیگر مساویند)

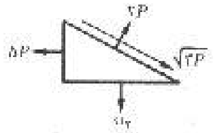


$\sum F_y = 0 ; \tau = 0$

$\sigma F_y = 0 ; \sigma_1 (dA \cos 30) = 2P \cos 30° - \sqrt{3} P \sin 30°$

$\Rightarrow \sigma_1 = P$



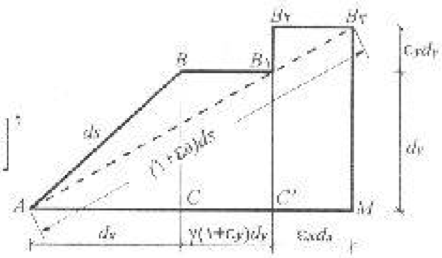


۹-۳۷. رابطهٔ ۹-۱۳ را با فرض اینکه ابتدا تغییر شکلهای برشی و سپس تغییر شکل در امتداد y و دست آخر تغییر شکل در امتداد x رخ می‌دهد، مجدداً به دست آورید.

BB_1: کرنش برشی

B_1B_2: کرنش در جهت y

B_2B_3: کرنش در جهت x



$$AB_3 = (1 + \varepsilon_\theta)\, ds$$

$$(AB_3)^2 = (AM)^2 + (MB)^2$$

$$= \left[\gamma(1 + \varepsilon_y)dy + (1 + \varepsilon_x)\, dx\right]^2 + \left[(1 + \varepsilon_y)dy\right]^2$$

از طرفی: $(AB_3)^2 = \left[(1 + \varepsilon_\theta)\, ds\right]^2$

از مساوی قرار دادن روابط اخیر و تقسیم بر ds^2 نتیجه می‌شود:

$$(1 + \varepsilon_\theta)^2 = \left[(1 + \varepsilon_x)\frac{dx}{ds} + \gamma(1 + \varepsilon_y)\frac{dy}{ds}\right]^2 + \left[(1 + \varepsilon_y)\frac{dy}{ds}\right]^2$$

اما می‌دانیم که: $\frac{dx}{ds} = \cos\theta$ و $\frac{dy}{ds} = \sin\theta$ پس:

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma \sin\theta \cos\theta$$

۹-۳۸. با کمک شکل ۹-۱۵ نشان دهید که:

$$\beta = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin\theta\cos\theta + \gamma_{xy}\cos^2\theta$$

چون زاویه خیلی کوچک است مقدار آن بر حسب رادیان با مقدار تانژانت آن برابر است یعنی:

$$\beta \approx \tan\beta = \frac{-\beta\beta'\cos\theta + \beta'\beta''\sin\theta + \beta''\beta'''\cos\theta}{dy'}$$

$$= \frac{-\varepsilon_x dx\cos\theta + \varepsilon_y dy\sin\theta + \gamma_{xy} dy\cos\theta}{dy'}$$

$$\frac{dx}{dy'} = Sin\,\theta \quad و \quad \frac{dy}{dy'} = Cos\,\theta$$

$$\beta = -\varepsilon_x\, Sin\,\theta\, Cos\,\theta + \varepsilon_y\, Sin\,\theta\, Cos\,\theta + \gamma_{xy}\, Cos^۲\,\theta$$

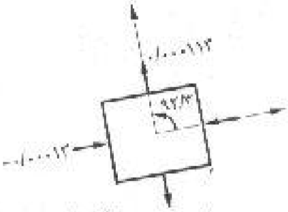
$$\beta = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\, Sin\,\theta\, Cos\,\theta + \gamma_{xy}\, Cos^۲\,\theta$$

۹-۳۹. اگر کرنشهای نقطه‌ای به صورت، $\varepsilon_x = -۰/۰۰۰۰۱۲$ و $\varepsilon_y = +۰/۰۰۱۱۲$ و $\gamma = -۰/۰۰۰۲۰$ اندازه‌گیری شده باشند، مطلوب است تعیین کرنشهای اصلی و امتدادهای مربوطه. مسأله را هم به وسیلهٔ روابط جبری و هم به وسیلهٔ روش ترسیمی دایرهٔ مور حل نمایید.

$$\varepsilon_{۱,۲} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{\gamma_{xy}}{۲}\right)^۲}$$

$$\varepsilon_{۱,۲} = \frac{-۰/۰۰۰۰۱۲ + ۰/۰۰۱۲}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{-۰/۰۰۰۰۱۲ - ۰/۰۰۱۲}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{-۰/۰۰۰۲۰}{۲}\right)^۲}$$

$$= ۰/۰۰۰۵ \pm ۰/۰۰۶۳$$



$$\rightarrow \varepsilon_۱ = ۰/۰۰۰۱۱۳ \quad و \quad \varepsilon_۲ = -۰/۰۰۰۱۳$$

$$tan\ ۲\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{-۰/۰۰۰۲۰}{-۰/۰۰۰۰۱۲ - ۰/۰۰۱۲} \Rightarrow ۲\theta_p = ۱۸۰ + ۴/۵۸^\circ = ۱۸۴/۵۸$$

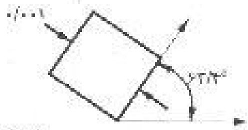
$$\theta_p = ۹۲/۳$$

توجه کنید که پیکانهای نشان داده شده روی اضلاع نشان‌دهنده جهت تغییر شکل می‌باشند

۹-۴۰. اگر کرنشهای نقطه‌ای به صورت، $\varepsilon_x = -۰/۰۰۰۸۰$ و $\varepsilon_y = -۰/۰۰۰۲۰$ و $\gamma = +۰/۰۰۰۸۰$ اندازه‌گیری شده باشند، مطلوب است تعیین کرنشهای اصلی و امتدادهای مربوطه. مسأله را هم به وسیلهٔ روابط جبری و هم به وسیله روش ترسیمی دایره مور حل نمایید.

$$\varepsilon_{۱,۲} = \frac{-۰/۰۰۰۸۰ - ۰/۰۰۰۲۰}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{-۰/۰۰۰۸۰ + ۰/۰۰۰۲۰}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{۰/۰۰۰۸}{۲}\right)^۲}$$

$$= -۰/۰۰۰۵ \pm ۰/۰۰۰۵$$



$$\varepsilon_۱ = ۰ \ و\ \varepsilon_۲ = -۰/۰۰۱$$

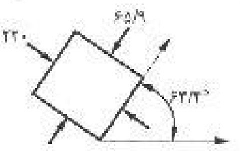
$$tan\ ۲\theta_p = \frac{۰/۰۰۰۸}{-۰/۰۰۰۸۰ + ۰/۰۰۰۲۰} \Rightarrow ۲\theta_p = ۱۸۰ - ۵۳/۱ = ۱۲۶/۹$$

$$\theta_p = ۶۳/۴۵$$

۹-۴۱. اگر کرنشهای اندازه‌گیری شده در مسأله قبل مربوط به یک عضو فولادی با ضریب ارتجاعی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب پواسون ۰/۳ باشد، مطلوب است تعیین تنشهای اصلی و امتدادهای مربوطه.

$$\sigma_۱ = \frac{E}{۱-\nu^۲}\left[\varepsilon_۱ - \nu\varepsilon_۲\right] = \frac{۲ \times ۱۰^۵}{۱-(۰/۳)^۲}\left[۰ - ۰/۳(۰/۰۰۱)\right] = -۶۵/۹\,Mpa$$

$$\sigma_۲ = \frac{E}{۱-\nu^۲}\left[\varepsilon_۲ - \nu\varepsilon_۱\right] = \frac{۲ \times ۱۰^۵}{۱-(۰/۳)^۲}\left[-۰/۰۰۱ - ۰\right] = -۲۲۰\,MPa$$



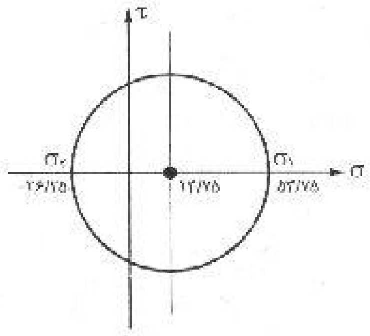
۹-۴۲. در نقطه‌ای از یک صفحهٔ ارتجاعی تحت تنش، اطلاعات زیر در دست است: حداکثر کرنش برشی مساوی ۵×۱۰^{-۴} و مجموع تنشهای قائم در روی دو صفحهٔ عمود بر هم مار بر نقطهٔ مزبور، مساوی ۲۷/۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشند. ضریب ارتجاعی ورق ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی برشی آن مساوی $۰/۸ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب پواسون مساوی ۰/۲۵ می‌باشد. مطلوب است محاسبهٔ مقدار تنشهای اصلی در نقطهٔ مزبور.

$$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} = \frac{۲۷/۵}{۲} = ۱۳/۷۵\,MPa$$

$$\tau_{max} = G\gamma_{max} = (۰/۸ \times ۱۰^۵)(۵ \times ۱۰^{-۴}) = ۴۰\,MPa$$

$$\sigma_۱ = ۱۳/۷۵ + ۴۰ = ۵۳/۷۵\,MPa$$

$$\sigma_۲ = ۱۳/۷۵ - ۴۰ = -۲۶/۲۵\,MPa$$



۹-۴۳. اطلاعات به دست آمده از یک گل کرنش ۴۵ درجه که به یک عضو فولادی تحت تنش وصل شده، به قرار زیر است:

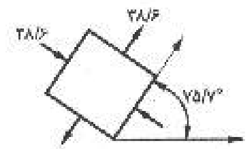
$$\varepsilon_{۰}{}^{\circ} = -۰/۰۰۰۲۲ \text{ و } \varepsilon_{۴۵}{}^{\circ} = +۰/۰۰۰۱۲ \text{ و } \varepsilon_{۹۰}{}^{\circ} = +۰/۰۰۰۲۲$$

مطلوب است تعیین تنشها و امتدادهای اصلی. ضریب ارتجاعی فولاد ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب پواسون مساوی ۰/۳ می‌باشد.

$$\gamma_{xy} = ۲\varepsilon_{۴۵}{}^{\circ} - (\varepsilon_{۰} + \varepsilon_{۹۰}) = ۲(۰/۰۰۰۱۲) - (-۰/۰۰۰۲۲ + ۰/۰۰۰۲۲) = ۰/۰۰۰۲۴$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{\gamma_{xy}}{۲}\right)^۲} = \frac{-۰/۰۰۰۰۲۲ + ۰/۰۰۰۰۲۲}{۲}$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{-۰/۰۰۰۰۲۲ - ۰/۰۰۰۰۲۲}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{۰/۰۰۰۰۲۴}{۲}\right)^۲}$$



$$\varepsilon_{1,2} = \pm ۰/۰۰۰۰۲۵۱$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{۱ - \nu^۲}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) = \frac{۲ \times ۱۰^۵}{۱ - ۰/۳^۲}\left[۰/۰۰۰۰۲۵۱ + ۰/۳(-۰/۰۰۰۰۲۵۱)\right] = ۳۸/۶\,MPa$$

$$\sigma_2 = -۳۸/۶\,MPa$$

$$\tan ۲\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{۰/۰۰۰۰۲۴}{-۰/۰۰۰۰۲۲ - ۰/۰۰۰۰۲۲} = \frac{۲۴}{-۴۴} \rightarrow ۲\theta_p = ۱۸۰ - ۲۸/۶ \rightarrow \theta_p = ۷۵/۷$$

۹-۴۴. اطلاعات به دست آمده از یک گل کرنش ۶۰ درجه که به یک عضو آلومینیومی تحت تنش وصل شده، به قرار زیر است:

$$\varepsilon_{۰^\circ} = +۰/۰۰۰۴۰,\ \varepsilon_{۶۰^\circ} = +۰/۰۰۰۴۰,\ \varepsilon_{۱۲۰^\circ} = -۰/۰۰۰۶۰$$

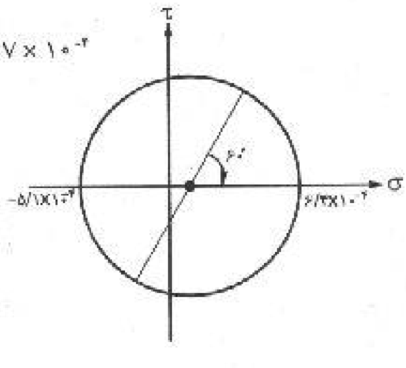
مطلوب است تعیین تنشها و امتدادهای اصلی. ضریب ارتجاعی آلومینیومی $۰/۷ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب پواسون مساوی ۰/۲۵ می‌باشد.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_۰ = ۰/۰۰۰۴$$

$$\varepsilon_y = \frac{۱}{۳}(۲\varepsilon_{۶۰} + ۲\varepsilon_{۱۲۰} - \varepsilon_۰) = \frac{۱}{۳}\left(۲(۰/۰۰۰۴) + ۲(۰/۰۰۰۶) - ۰/۰۰۰۴\right) = -۰/۰۰۰۲۶۷$$

$$\gamma_{xy} = \frac{۲}{\sqrt{۳}}(\varepsilon_{۶۰} - \varepsilon_{۱۲۰}) = \frac{۲}{\sqrt{۳}}(۰/۰۰۰۴ + ۰/۰۰۰۶) = ۰/۰۰۱۱۵۵$$

$$center = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{۲} = \frac{۰/۰۰۰۴ - ۰/۰۰۰۲۶۷}{۲} = ۰/۶۷ \times ۱۰^{-۴}$$



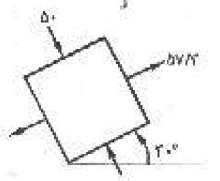
$$R = \frac{\gamma_{xy}}{۲} = ۵/۷۷ \times ۱۰^{-۴}$$

$$\varepsilon_1 = ۰/۶۷ \times ۱۰^{-۴} + ۵/۷۷ \times ۱۰^{-۴} = ۶/۴ \times ۱۰^{-۴}$$

$$\varepsilon_2 = ۰/۶۷ \times ۱۰^{-۴} - ۵/۷۷ \times ۱۰^{-۴} = -۵/۱ \times ۱۰^{-۴}$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{۱ - \nu^۲}\left[\varepsilon_1 - \nu\varepsilon_2\right] = \frac{۰/۷ \times ۱۰^۵}{۱ - (۰/۲۵)^۲}\left[۰/۰۰۰۶۴ - (۰/۲۵)(-۰/۰۰۰۵۱)\right] = ۵۷/۳\,MPa$$

$$\sigma_{۲}=\frac{E}{۱-\nu^{۲}}\left[\varepsilon_{۲}-\nu\varepsilon_{۱}\right]=\frac{۰/۷\times ۱۰^{۵}}{۱-(۰/۲۵)^{۲}}\left[-۰/۰۰۰۵۱-(۰/۲۵)۰/۰۰۰۶۴)\right]=-۵۰\ MPa$$



$$\tan ۲\theta_{p}=\frac{۰/۰۰۱۱۵۵}{۰/۰۰۰۴+۰/۰۰۰۲۶۷}\Rightarrow ۲\theta=۶۰^{\circ}\rightarrow\theta_{p}=۳۰^{\circ}$$

۹-۴۵. اطلاعات به دست آمده از یک گل کرنش چهار شاخه که به یک عضو آلومینیومی تحت تنش وصل شده، به قرار زیر است:

$\varepsilon_{۰^{\circ}}=-۰/۰۰۰۱۲$ و $\varepsilon_{۴۵^{\circ}}=+۰/۰۰۰۴۰$ و $\varepsilon_{۹۰^{\circ}}=+۰/۰۰۱۱۲$ و $\varepsilon_{۱۳۵^{\circ}}=+۰/۰۰۰۶۰$

سازگاری اطلاعات به دست آمده را تحقیق کنید. سپس تنشها و امتدادهای اصلی را تعیین نمایید. ضریب ارتجاعی و ضریب پواسون را مطابق مسأله ۹-۴۴ در نظر بگیرید.

$$\gamma_{xy}=۲\varepsilon_{۴۵}-(\varepsilon_{۰}+\varepsilon_{۹۰})=۲\times ۴\times ۱۰^{-۴}-(-۱/۲+۱۱/۲)\times ۱۰^{-۴}=-۲\times ۱۰^{-۴}$$

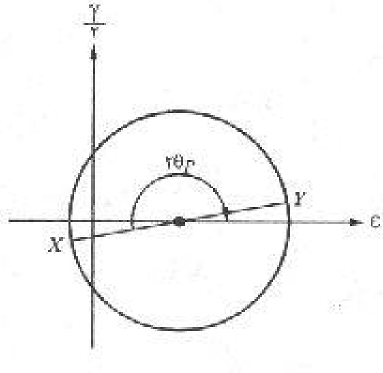
$$\varepsilon_{x}=\varepsilon_{۰}=-۱/۲\times ۱۰^{-۴}\qquad \varepsilon_{y}=\varepsilon_{۹۰}=۱۱/۲\times ۱۰^{-۴}$$

$$center=\frac{\varepsilon_{x}+\varepsilon_{y}}{۲}=\frac{-۱/۲+۱۱/۲}{۲}\times ۱۰^{-۴}=۵\times ۱۰^{-۴}$$

$$R=\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{x}-\varepsilon_{y}}{۲}\right)^{۲}+\left(\frac{\gamma_{xy}}{۲}\right)^{۲}}=\sqrt{\left(\frac{-۱/۲-۱۱/۲}{۲}\right)^{۲}+(-۱)^{۲}}=۶/۳\times ۱۰^{-۴}$$

$$\varepsilon_{۱}=(۵+۶/۳)\times ۱۰^{-۴}=۱۱/۳\times ۱۰^{-۴}$$

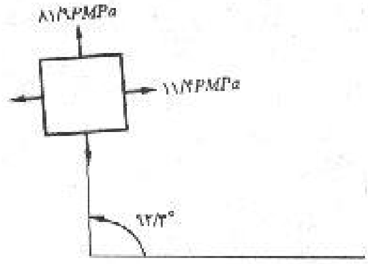
$$\varepsilon_{۲}=(۵-۶/۳)\times ۱۰^{-۴}=-۱/۳\times ۱۰^{-۴}$$

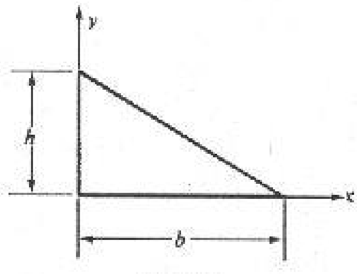


$$\tan ۲\theta_{p}=\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_{x}-\varepsilon_{y}}=\frac{-۱}{-۱/۲-۱۱/۲}=\frac{-۱}{-۱۲/۴}\Rightarrow ۲\theta_{p}=۱۸۰^{\circ}+۴/۶^{\circ}\Rightarrow\theta_{p}=۹۲/۳^{\circ}$$

$$\sigma_{۱}=\frac{E}{۱-\nu^{۲}}(\varepsilon_{۱}-\nu\varepsilon_{۲})=\frac{۰/۷\times ۱۰^{۵}}{۱-(۰/۲۵)^{۲}}\left[۱۱/۳\times ۱۰^{-۴}-(۰/۲۵)(-۱/۳\times ۱۰^{-۴})\right]=۸۱/۹\ MPa$$

$$\sigma_{۲}=\frac{E}{۱-\nu^{۲}}(\varepsilon_{۲}-\nu\varepsilon_{۱})=\frac{۰/۷\times ۱۰^{۵}}{۱-(۰/۲۵)^{۲}}\left[-۱/۳\times ۱۰^{-۴}-(۰/۲۵)(۱۱/۳\times ۱۰^{-۴})\right]=۱۱/۴\ MPa$$

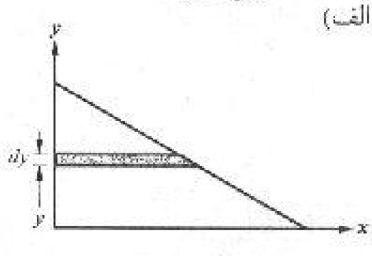




مسأله ۹-۴۶

۹-۴۶. (الف) مطلوب است تعیین حاصل ضرب ماند برای مثلث نشان داده شده در شکل نسبت به محورهای x و y. (ب) سپس با استفاده از قضیه محورهای موازی (فصل ششم) و نتایج به دست آمده از قسمت الف، حاصل ضرب ماند را نسبت به محورهای افقی و قائم مار بر مرکز هندسی، تعیین نمایید.

الف)



$$\frac{h-y}{h} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = \frac{b}{h}(h-y) = b\left(۱ - \frac{y}{h}\right)$$

$$I_{xy} = \int xy\, dA = \int_۰^h \frac{b^۲}{۲}\left(۱ - \frac{y}{h}\right)^۲ y\, dy$$

$$= \frac{b^۲}{۲}\left(\frac{h^۲}{۲} - \frac{۲}{۳}h^۲ + \frac{۱}{۴}h^۲\right) = \frac{b^۲h^۲}{۲۴}$$

ب)

$$I_{x_۰y_۰} = I_{xy} - A d_x d_y$$

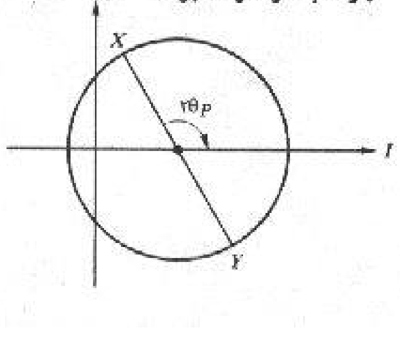
$$I_{x_۰y_۰} = \frac{b^۲h^۲}{۲۴} - \frac{۱}{۲}bh\left(\frac{b}{۳}\right)\left(\frac{h}{۳}\right) = -\frac{b^۲h^۲}{۱۲}$$

۹-۴۷. اگر در مسأله بالا $b = ۲۰۰$ و $h = ۱۰۰$ میلی‌متر باشد، مطلوب است تعیین محورهای اصلی مار بر مرکز هندسی سطح و لنگرهای ماند اصلی نسبت به محورهای مزبور. از نتایج قسمت (ب) مسأله قبل و جدول مشخصات هندسی موجود در پیوست کتاب، می‌توانید کمک بگیرید. (ب) اگر تیری که دارای مقطع فوق می‌باشد، تحت تأثیر یک لنگر خمشی در حول محور اصلی حداکثر قرار بگیرد و تنش خمشی مجاز مساوی ۱۰۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، مقدار لنگر وارده چقدر خواهد بود.

$$I_x = \frac{۱}{۳۶}(۰/۲)(۰/۱)^۳ = ۵/۵۵ \times ۱۰^{-۶}\ m^۴$$

$$I_y = \frac{۱}{۳۶}(۰/۱)(۰/۲)^۳ = ۲۲/۲۲ \times ۱۰^{-۶}\ m^۴$$

$$I_{xy} = \frac{۱}{۲۴}(۰/۲)^۲(۰/۱)^۲ = ۱۶/۶۷ \times ۱۰^{-۶}\ m^۴$$



$$center = \frac{I_x + I_y}{۲} = \frac{(۵/۵۵ + ۲۲/۲۲) \times ۱۰^{-۶}}{۲} = ۱۳/۸۹ \times ۱۰^{-۶}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{۲}\right)^۲ + I_{xy}^۲} = \sqrt{\left(\frac{۵/۵۵ - ۲۲/۲۲}{۲}\right)^۲ + \left(۱۶/۶۷\right)^۲} = ۱۸/۶۴ \times ۱۰^{-۶}$$

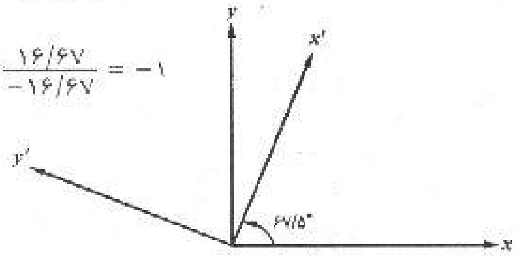
$$I_۱ = ۱۳/۸۹ \times ۱۰^{-۶} + ۱۸/۶۴ \times ۱۰^{-۶} = ۳۲/۵۳ \times ۱۰^{-۶}\, m^۴$$

$$I_۲ = ۱۳/۸۹ \times ۱۰^{-۶} - ۱۸/۶۴ \times ۱۰^{-۶} = -۴/۷۵ \times ۱۰^{-۶}\, m^۴$$

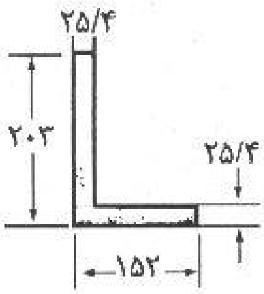
$$\tan ۲\theta_p = \frac{I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{۱۶/۶۷}{۵/۵۵ - ۲۲/۲۲} = \frac{۱۶/۶۷}{-۱۶/۶۷} = -۱$$

$$\Rightarrow ۲\theta_p = ۱۸۰ - ۴۵ \Rightarrow \theta_p = ۶۷/۵$$

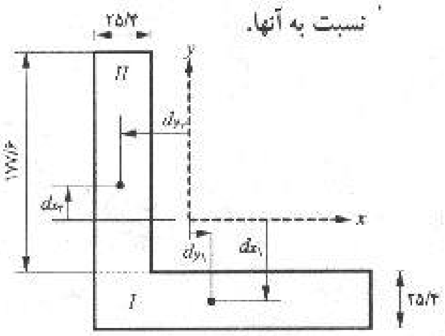
$$\sigma = \frac{Mc}{I}$$



۹-۴۸. مطلوب است تعیین محورهای اصلی مار بر مرکز هندسی نبشی نشان داده شده و لنگرهای ماند اصلی نسبت به آنها.



مسئله ۹-۴۸



$$\bar{x} = \frac{(۱۵۲ \times ۲۵/۴)(۷۶) + (۱۷۷/۶ \times ۲۵/۴)(۱۲/۷)}{۱۵۲ \times ۲۵/۴ + ۱۷۷/۶ \times ۲۵/۴} = ۴۲\, mm$$

$$\bar{y} = \frac{(۱۵۲ \times ۲۵/۴)(۱۲/۷) + (۱۷۷/۶ \times ۲۵/۴)\left(۲۵/۴ + \frac{۱۷۷/۶}{۲}\right)}{۱۵۲ \times ۲۵/۴ + ۱۷۷/۶ \times ۲۵/۴} = ۶۷/۴$$

برای قسمت I:

$$d_{x_۱} = \frac{۲۵/۴}{۲} - ۶۷/۴ = -۵۴/۷\, mm$$

$$d_{y_۱} = \frac{۱۵۲}{۲} - ۴۲ = ۳۴\, mm$$

$$I_{xy_۱} = I_{x_۰ y_۰} + A\, d_x d_y = ۰ + (۱۵۲ \times ۲۵/۴)(-۵۴/۷)(۳۴) = -۷/۱۸ \times ۱۰^۶\, mm^۴$$

برای قسمت II :

$$d_{x_1} = \frac{۲۰۳}{۲} - ۶۷/۴ = ۳۴/۱\, mm$$

$$d_{y_2} = \frac{۲۵/۴}{۲} - ۴۲ = -\ ۲۹/۳ mm$$

$$I_{xy_2} = I_{x_2 y_2} + A\, d_x d_y = ۰ + (۱۷۷/۶ \times ۲۵/۴)(۳۴/۱)(-۲۹/۳) = -۴/۵ \times ۱۰^{۶}\ mm^{۴}$$

$$I_{xy} = -۷/۱۸ \times ۱۰^{۶} - ۴/۵ \times ۱۰^{۶} = -۱۱/۶۸ \times ۱۰^{۶}\ mm^{۴}$$

$$I_{x_1} = \frac{۱}{۱۲}(۱۵۲)(۲۵/۴)^{۳} + (۱۵۲ \times ۲۵/۴)(۵۴/۷)^{۲} = ۱۱/۷۶ \times ۱۰^{۶}\ mm^{۴}$$

$$I_{y_1} = \frac{۱}{۱۲}(۲۵/۴)(۱۵۲)^{۳} + (۱۵۲ \times ۲۵/۴)(۳۴)^{۲} = ۱۱/۹ \times ۱۰^{۶}\ mm^{۴}$$

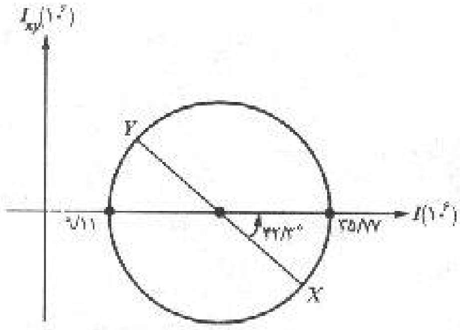
$$I_{x_2} = \frac{۱}{۱۲}(۲۵/۴)(۱۷۷/۶)^{۳} + (۱۷۷/۶ \times ۲۵/۴)(۳۴/۱)^{۲} = ۱۷/۱ \times ۱۰^{۶}\ mm^{۴}$$

$$I_{y_2} = \frac{۱}{۱۲}(۱۷۷/۶)(۲۵/۴)^{۳} + (۱۷۷/۶ \times ۲۵/۴)(۲۹/۳)^{۲} = ۴/۱۲ \times ۱۰^{۶}\ mm^{۴}$$

$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2} = ۲۸/۸۶ \times ۱۰^{۶}\ mm^{۴}$$

$$I_y = I_{y_1} + I_{y_2} = ۱۶/۰۲ \times ۱۰^{۶}\ mm^{۴}$$

$$center = \frac{I_x + I_y}{۲} = ۲۲/۴۴ \times ۱۰^{۶}\ mm^{۴}$$



$$R = \sqrt{\left(\frac{۲۸/۸۶ - ۱۶/۰۲}{۲}\right)^{۲} + \left(۱۱/۶۸\right)^{۲}} \times ۱۰^{۶} = ۱۳/۳۳ \times ۱۰^{۶}$$

$$I_1 = (۲۲/۴۴ + ۱۳/۳۳) \times ۱۰^{۶} = ۳۵/۷۷ \times ۱۰^{۶}\ mm^{۴}$$

$$I_2 = (۲۲/۴۴ - ۱۳/۳۳) \times ۱۰^{۶} = ۹/۱۱ \times ۱۰^{۶}\ mm^{۴}$$

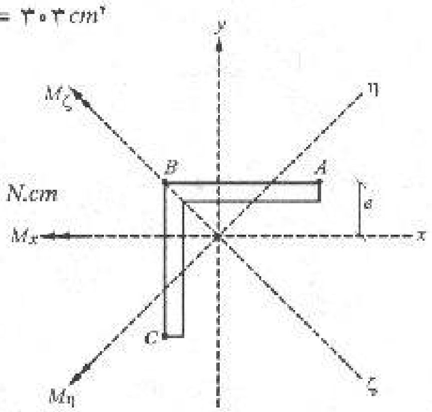
$$\tan ۲\theta_p = \frac{I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{-۱۱/۶۸}{۱۲/۸۴} \Rightarrow ۲\theta_p = -۴۲/۳^{\circ} \to \theta_p = -۲۱/۱^{\circ}$$

۹-۴۹. یک نبشی ۱۲ × ۱۵۰ × ۱۵۰ فولادی که یک ساق آن افقی و ساق دیگرش قائم و رو به پایین می‌باشد، به عنوان یک تیر طره‌ای به دهانهٔ ۲/۱۲ متر مورد استفاده قرار گرفته است. اگر یک نیروی رو به بالای ۴۰۰۰ نیوتنی در انتهای آزاد این تیر بر مرکز برش مقطع وارد گردد، حداکثر تنشهای کششی و فشاری موجود در انتهای گیردار این تیر چقدر خواهد بود. از وزن نبشی صرف نظر کنید.

از جدول ۱۰ ضمیمه مشخصات موردنیاز استخراج می‌شود:

$a = ۱۵۰\,mm = ۱۵\,cm$ و $e = ۴/۱۲\,cm$

$I_x = I_y = ۷۳۷\,cm^۴$ و $I_\xi = ۱۱۷۰\,cm^۴$ و $I_\eta = ۳۰۳\,cm^۴$



$$M_x = P \times e = ۴۰۰۰ \times ۲۱۲ = ۸۴۸۰۰۰\,N.cm$$

$$M_\xi = M_\eta = M_x \, Cos\ ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} M_x = ۴۲۴۰۰۰\sqrt{۲}\ N.cm$$

$$\sigma_A = -\frac{M_\xi \eta_A}{I_\xi} + \frac{M_\eta \xi_A}{I_\eta}$$

$$\left.\begin{aligned} \eta_A &= a\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱۵\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱۰/۶\,cm \\ \xi_A &= a\frac{\sqrt{۲}}{۲} - e\sqrt{۲} = ۴/۷۸\,cm \end{aligned}\right\} \rightarrow \sigma_A = ۴۰۲۶/۹\,N/cm^۲$$ کششی

$$\sigma_B = -M_\eta \frac{\xi_B}{I_\eta} = -۴۲۴۰۰۰\sqrt{۲} \times \frac{۴/۱۲\sqrt{۲}}{۳۰۳} = -۱۱۵۳۰/۶\,N/cm^۲$$ فشاری

$$\sigma_c = \frac{M_\xi \eta_c}{I_\xi} + \frac{M_\eta \xi_c}{I_\eta}$$

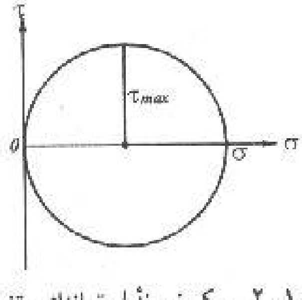
$\eta_c = ۱۰/۶\,cm$ و $\xi_c = ۴/۷۸\,cm \longrightarrow \sigma_c = ۱۴۸۹۲\,N/cm^۲$ کششی

مسائل فصل دهم

۱۰-۱. یک میلهٔ فولادی با مقطع مربع به ابعاد ۵۰ × ۵۰ میلی‌متر، تحت تأثیر نیروی کشش محوری می‌باشد. اگر حداکثر نیروی برشی ناشی از این نیرو مساوی ۸۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، مطلوب است تعیین مقدار نیروی وارده.

$\sigma = ۲\,\tau_{max} = ۲ \times ۸۰ = ۱۶۰\ N/mm^۲$

$P = \sigma A = ۱۶۰ \times (۵۰ \times ۵۰) \Rightarrow P = ۴۰۰\ kN$



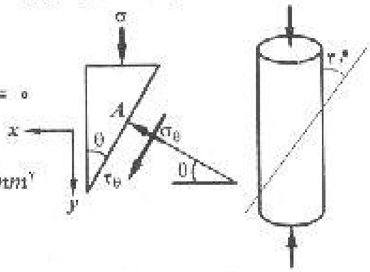
۱۰-۲. یک نمونهٔ استوانه‌ای بتنی که در حالت قائم تحت آزمایش قرار گرفته بود، در تنش فشاری معادل ۳۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع گسیخته شد. گسیختگی در صفحه‌ای که با امتداد قائم زاویه‌ای مساوی ۳۰ درجه می‌سازد، رخ داد. تنشهای قائم و برشی موجود در صفحهٔ گسیختگی را محاسبه نموده و آنها را در یک شکل واضح نمایش دهید.

$\sum F_x = ۰ : \sigma_\theta A \,.\, Cos\,\theta + \tau_\theta A \,.\, Sin\,\theta = ۰$

$\sum F_y = ۰ : \sigma_\theta A \,.\, Sin\,\theta + \tau_\theta A \,.\, Cos\,\theta + \sigma\,(A\ Sin\,\theta) = ۰$

$\Rightarrow \tau_\theta = \sigma\ Sin\,\theta\ Cos\,\theta = ۳۰\ Sin\ ۳۰^\circ\ Cos\ ۳۰^\circ = ۱۳\ N/mm^۲$

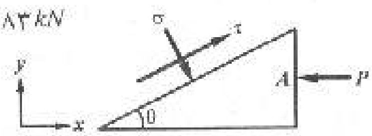
$\sigma_\theta = -\,\sigma\ Sin^۲\,\theta = -۳۰\ Sin^۲\ ۳۰^\circ = -۷/۵\ N/mm^۲$



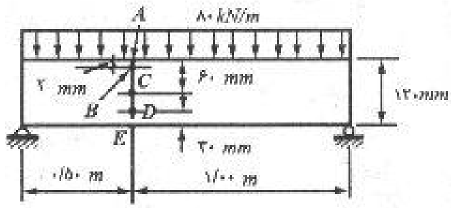
۱۰-۳. یک عضو فشاری چوبی به مقطع ۱۰۰ × ۵۰ میلی‌متر که تارهای آن با محور عضو زاویه‌ای مساوی ۲۵ درجه می‌سازند، مفروض است. اگر تنش برشی مجاز این عضو به موازات تارهای چوب، مساوی ۰/۶ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، نیروی فشاری مجاز چوب که توسط تنش برشی کنترل می‌گردد، چقدر است.

$$\left.\begin{array}{l}\sum F_x = ۰ : \tau \,.\, \dfrac{A}{Sin\,\theta} \,.\, Cos\,\theta + \sigma \,.\, \dfrac{A}{Sin\,\theta} \,.\, Sin\,\theta - P = ۰ \\ \sum F_y = ۰ : \tau \,.\, \dfrac{A}{Sin\,\theta} \,.\, Sin\,\theta - \sigma \,.\, \dfrac{A}{Sin\,\theta} \,.\, Cos\,\theta = ۰\end{array}\right\} \Rightarrow \tau = \frac{P}{A}\,Cos\,\theta\ Sin\,\theta$$

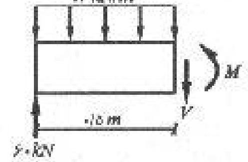
$$\Rightarrow P = \frac{\tau A}{Sin\,\theta\ Cos\,\theta} = \frac{۰/۶ \times ۵۰ \times ۱۰۰}{Sin\ ۲۵^\circ \times Cos\ ۲۵^\circ} \Rightarrow P = ۷/۸۳\ kN$$



۱۰-۴. **یک تیر ساده به مقطع ۱۲۰ × ۵۰ میلی متر و دهانه ۱/۵ متر، بار گستردهٔ یکنواختی به میزان ۸۰ کیلونیوتن متر را که شامل وزن خودش نیز می‌باشد، حمل می‌کند. مطلوب است تعیین مقدار و امتداد تنشهای اصلی در نقاط A، B، C، D و E از مقطع نشان داده شده در شکل.**



مسئله ۱۰-۴



$$V = ۶۰ - ۸۰ \times ۰/۵ \Rightarrow F = ۲۰\, kN$$

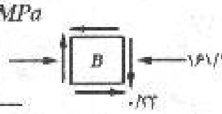
$$M = ۶۰ \times ۰/۵ - (۸۰ \times ۰/۵) \times \frac{۰/۵}{۲} \Rightarrow M = ۲۰\, kN.m$$

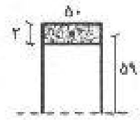
توزیع نیروی برشی در ارتفاع مقطع مستطیل بصورت سهمی می‌باشد، پس هیچ تنش برشی در روی جزء سطوح E و A بوجود نمی‌آید و تنشهای اصلی در این نقاط همان تنشهای نرمال ناشی از خمش می‌باشند:

$$\sigma_{A,E} = \frac{\pm Mc}{I} = \frac{\pm ۶M}{bh^۲} = \frac{\pm ۶ \times (۲۰ \times ۱۰^۶)}{۵۰ \times ۱۲۰^۲} = \pm\ ۱۶۶/۷\, MPa$$

$$\sigma_B = \frac{۵۸}{۶۰}\,\sigma_A = \frac{۵۸}{۶۰}(-۱۶۶/۷) = -\ ۱۶۱/۱\, MPa$$

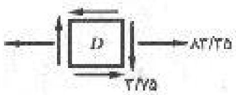
$$\tau_B = \frac{VQ_B}{It} = \frac{-(۲۰ \times ۱۰^۳)(۵۰ \times ۲) \times ۵۹}{\frac{۱}{۱۲} \times ۵۰(۱۲۰)^۳(۵۰)} = -\,۰/۳۳\, MPa$$





$$\sigma_{۱,۲}\Big)_B = \frac{-۱۶۱/۱ + ۰}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{-۱۶۱/۱ - ۰}{۲}\right)^۲ + (۰/۳۳)^۲} \Rightarrow \sigma_۱ = ۰ \ ,\ \ \sigma_۲ = ۱۶۱/۱\, Mpa$$

$$\sigma_D = \frac{۳۰}{۶۰}(۱۶۶/۷) = ۸۳/۳۵\, MPa$$



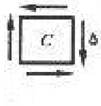
$$\tau_D = \frac{VQ_D}{It} = \frac{-(۲۰ \times ۱۰^۳)(۵۰ \times ۳۰) \times ۴۵}{\frac{۱}{۱۲} \times ۵۰(۱۲۰)^۳(۵۰)} = -۳/۷۵\, MPa$$

$$\sigma_{۱,۲}\Big)_D = \frac{۸۳/۳۵ + ۰}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{۸۳/۳۵ - ۰}{۲}\right)^۲ + (۳/۷۵)^۲} \Rightarrow \sigma_۱ = ۸۳/۵\, MPa\ ,\ \ \sigma_۲ = -\ ۰/۱۷\, MPa$$

نقطه C روی محور خنثی تیر واقع می‌باشد؛ بنابراین بر اثر خمش، تنشی به آن وارد نمی‌شود امّا تنش

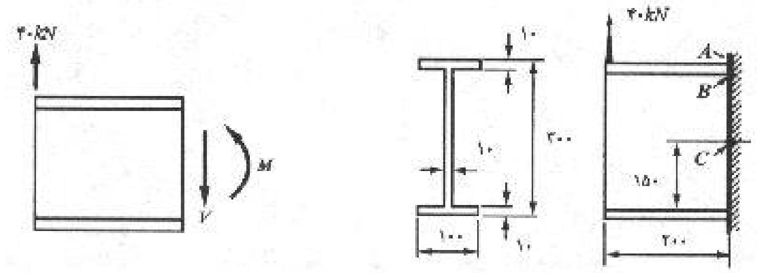
برشی وارد بر آن عبارتست از:

$$\tau_c = \tau_{max} = \frac{۳}{۲} \times \frac{V}{A} = \frac{۳}{۲} \times \frac{۲۰ \times ۱۰^{۳}}{۵۰ \times ۱۲۰} = -۵ MPa$$



$$\sigma_{۱,۲})_C = \frac{۰ + ۰}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{۰ - ۰}{۲}\right) + ۵^{۲}} \Rightarrow \sigma_{۱,۲} = \pm\ ۵ MPa$$

۵-۱۰. یک تیر طره‌ای بسیار کوتاه I مطابق شکل بارگذاری شده است. مطلوب است تعیین مقدار و امتداد تنشهای اصلی در نقاط A ، B و C. نقطهٔ B در جان و در محل تلاقی آن با بال قرار دارد. از وزن تیر و اثر تمرکز تنش چشم‌پوشی نمایید. لنگرماند مقطع در حول محور خنثی مساوی ۶۰×۱۰^{۶} میلی‌متر به توان ۴ می‌باشد. برای تعیین تنش برشی از رابطهٔ دقیق استفاده نمایید.



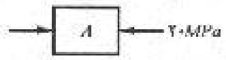
$M = ۴۰ \times ۰/۲ = ۸ kN.m$

مسأله ۵-۱۰

$V = -۴۰ kN$

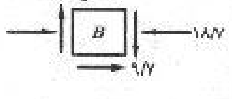
در نقطه A تنش برشی صفر است و تنش قائم برابر است با:

$$\sigma_A = \frac{-Mc}{I} = \frac{-۸ \times ۱۰^{۶}\ (N.mm) \times ۱۵۰}{۶۰ \times ۱۰^{۶}} = -۲۰\ MPa$$



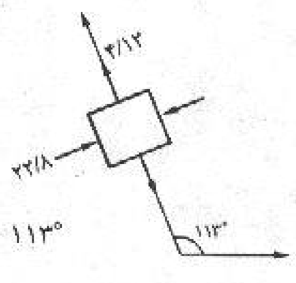
$$\sigma_B = \frac{My}{I} = \frac{-(۸ \times ۱۰^{۶})(۱۴۰)}{۶۰ \times ۱۰^{۶}} = -۱۸/۷\, MPa$$

$$\tau_B = \frac{VQ_B}{It} = \frac{-(۴۰ \times ۱۰^{۳})(۱۰۰ \times ۱۰) \times ۱۴۵}{(۶۰ \times ۱۰^{۶})(۱۰)} = -۹/۷\, MPa$$



$$\sigma_{۱,۲})_B = \frac{-۱۸/۷}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{-۱۸/۷}{۲}\right)^{۲} + (-۹/۷)^{۲}}$$

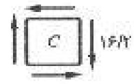
$$\Rightarrow \sigma_۱ = ۴/۱۲\, MPa \ ,\ \sigma_۲ = -۲۲/۸\, MPa$$



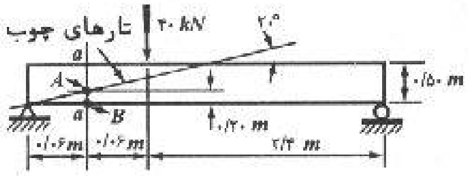
$$\tan ۲\,\theta_p = \frac{۲\tau_B}{\sigma_B} = \frac{۲(-۹/۷)}{-۱۸/۷} \Rightarrow ۲\theta_p = ۱۸۰^\circ + ۴۶^\circ \Rightarrow \theta_p = ۱۱۳^\circ$$

نقطه C روی محور خنثی قرار دارد پس تنش ناشی از خمش روی آن بوجود نمی‌آید.

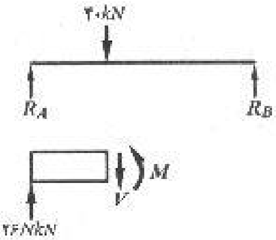
$$\tau_C = \frac{VQ_C}{It} = \frac{(-۴۰\times ۱۰^{۳})\left[(۱۰۰\times ۱۰)(۱۴۵) + (۱۰\times ۱۴۰)(۷۰)\right]}{(۶۰\times ۱۰^{۶})(۱۰)} = -۱۶/۲\, MPa$$



۱۰-۶. یک تیر چوبی به مقطع ۵۰۰ × ۱۰۰ میلی‌متر، نیروی متمرکز ۴۰ کیلونیوتنی را مطابق شکل حمل می‌کند. در مقطع $a-a$ تارهای چوب با محور تیر زاویه ۲۰ درجه می‌سازند. مطلوب است تعیین تنش برشی ناشی از بار ۴۰ کیلونیوتنی در نقاط A و B در امتداد تارهای چوب.



مسأله ۱۰-۶



$$R_A \times ۳/۶ - ۴۰ \times ۲/۴ = ۰ \Rightarrow R_A = ۲۶/۷\, kN$$

$$V = -۲۶/۷\, kN$$

$$M = ۲۶/۷ \times ۰/۶ = ۱۶\, kN.m$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{(۱۶\times ۱۰^{۶})(۲۵۰)}{\frac{۱}{۱۲}(۱۰۰)(۵۰۰)^{۳}} = ۳/۸۴\, MPa$$

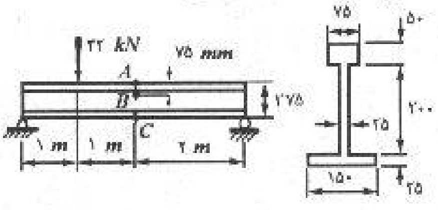
$$\tau'_B = -\frac{۳/۸۴ - ۰}{۲} Sin\ (۲\times ۱۱۰) + ۰\times Cos(۲\times ۱۱۰) = ۱/۲۳\, MPa$$

$$\sigma_A = \frac{۵۰}{۲۵۰}(۳/۸۴) = ۰/۷۷\, MPa$$

$$\tau_A = \frac{VQ_A}{It} = \frac{(۲۶/۷\times ۱۰^{۳})(۵۰\times ۱۰۰)(۲۲۵)}{\frac{۱}{۱۲}(۱۰۰)(۵۰۰)^{۳}(۱۰۰)} = -۰/۷۶۸\, MPa$$

$$\tau'_A = -\frac{۰/۷۷-۰}{۲} Sin\ ۴۰^\circ + (-۰/۷۶۸)\, Cos\ ۴۰^\circ = -۰/۸۳۵\, MPa$$

۱۰-۷. یک تیر چدنی مطابق شکل بارگذاری شده است. مطلوب است تعیین تنشهای اصلی در سه نقطهٔ C،B،A. لنگر ماند مقطع در حول محور خنثی مساوی ۱۲۴×۱۰^{۶} میلی‌متر به توان ۴ می‌باشد.



مسأله ۱۰-۷

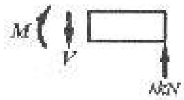
$$\bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{۱۵۰ \times ۲۵ \times ۱۲/۵ + ۲۰۰ \times ۲۵ \times ۱۲۵ + ۷۵ \times ۵۰ \times ۲۵۰}{۱۵۰ \times ۲۵ + ۲۰۰ \times ۲۵ + ۷۵ \times ۵۰} \Rightarrow \bar{y} = ۱۲۸/۷۵$$

$R_B \times ۴ = ۳۲ \times ۱ \Rightarrow R_B = ۸\,kN$

$V = ۸\,kN$

$M = ۱۶\,kN.m$

$$\sigma_A = \frac{Mc}{I} = \frac{(۱۶ \times ۱۰^۶)(۲۷۵ - ۱۲۸/۷۵)}{۱۲۴ \times ۱۰^۶} = ۱۸/۸۷\,MPa \text{ فشاری}$$



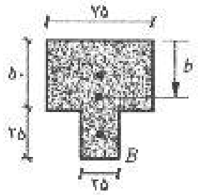
$\tau_A = ۰$

$$\sigma_B = \frac{My_B}{I} = \frac{(۱۶ \times ۱۰^۶)(۲۷۵ - ۷۵ - ۱۲۸/۷۵)}{۱۲۴ \times ۱۰^۶} = ۹/۱۹ \text{ فشاری}$$

$$b = \frac{(۷۵ \times ۵۰)(۲۵) + (۲۵ \times ۲۵)(۵۰ + ۱۲/۵)}{۷۵ \times ۵۰ + ۲۵ \times ۲۵} = ۳۰/۳۶ \text{ از بالا}$$

$$\tau_B = \frac{(۸ \times ۱۰^۳)(۷۵ \times ۵۰ + ۲۵ \times ۲۵)(۲۷۵ - ۳۰/۳۶ - ۱۲۸/۷۵)}{(۱۲۴ \times ۱۰^۶)(۲۵)} = ۱/۳۱\,MPa$$

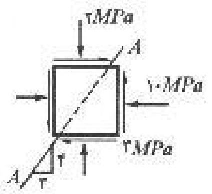
$$\sigma_{۱,۲})_B = \frac{-۹/۱۹}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{-۹/۱۹}{۲}\right)^۲ + (۱/۳۱)^۲} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_۱ = ۰/۱۸\,MPa \\ \sigma_۲ = -۹/۳۷\,MPa \end{cases}$$



$$\sigma_c = \frac{Mc}{I} = \frac{(۱۶ \times ۱۰^۶)(۱۲۸/۷۵)}{۱۲۴ \times ۱۰^۶} = ۱۶/۶ \text{ کششی}$$

$\tau_c = ۰$

۸-۱۰. در یک نقطهٔ مشخص از یک سازهٔ بنایی، حالت تنش مطابق شکل می‌باشد. سنگی که این بنا از آن ساخته شده لایه‌لایه است و در امتداد صفحه‌ای به موازات $A-A$ در برش ضعیف می‌باشد. آیا حالت تنش نشان داده شده مجاز می‌باشد. تنش مجاز سنگ را در هر امتداد، ۱/۵ مگاپاسکال در کشش و ۱۴ مگاپاسکال در فشار و تنش برشی مجاز در امتداد $A-A$ را مساوی ۲/۳ مگاپاسکال در نظر بگیرید.



$\sigma_x = -۱۰\,MPa \quad , \quad \sigma_y = -۲\,MPa, \quad \tau_{xy} = ۳\,MPa$

$$\sigma_{۱,۲} = \frac{-۱۰ - ۲}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{-۱۰ + ۲}{۲}\right)^۲ + ۳^۲} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_۱ = ۰/۷\,MPa < ۱/۵\,MPa \rightarrow \text{مجاز است} \\ \sigma_۲ = -۱۲/۷\,MPa < ۱۴\,MPa \rightarrow \text{مجاز است} \end{cases}$$

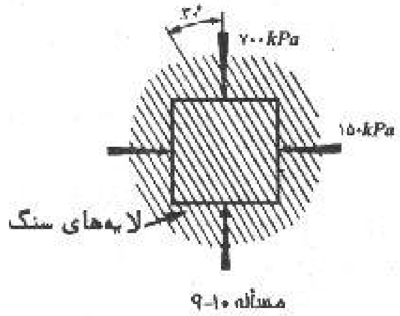
$Sin\alpha = \frac{۴}{۵} \rightarrow \alpha = ۵۳/۱^\circ$

$$\sigma_{AA} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲} Sin\,۲x + \tau_{xy} Cos\,۲x = -\frac{-۱۰ + ۲}{۲} Sin\,(۱۰۶/۲)^\circ + ۳ \times Cos\,(۱۰۶/۲)^\circ$$

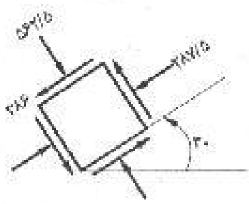
$\Rightarrow \tau_{AA} = ۳\,MPa > ۲/۳\,MPa$

بنابراین تنش برشی در امتداد $A-A$ بیشتر از مقدار مجاز بوده و حالت تنش نشان داده شده مجاز نمی‌باشد.

۱۰-۹. طبق برآوردهای انجام شده، حالت تنش در پی صخره‌ای یک سازهٔ سنگین پس از اتمام عملیات ساختمانی آن، مطابق شکل می‌باشد. اگر صخره به صورت لایه‌لایه با لایه‌هایی که با محور قائم زاویه ۳۰ درجه می‌سازند باشد، آیا حالت تنش برآورد شده مجاز می‌باشد. ضریب اصطکاک بین دو لایهٔ سنگی را مساوی ۰/۵ و چسبندگی بین دو لایه را مساوی ۸۵۰ کیلوپاسکال (کیلونیوتن بر مترمربع) در نظر بگیرید.



مسأله ۱۰-۹



$$\sigma_x = -۱۵۰\ kPa \ , \quad \sigma_y = -۷۰۰\ kPa$$

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲} Cos\ ۲\theta + \tau_{xy}\ Sin\ ۲\theta$$

$$\sigma'_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲} Cos\ ۲\theta - \tau_{xy}\ Sin\ ۲\theta$$

$$\sigma'_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲} Sin\ ۲\theta + \tau_{xy}\ Cos\ ۲\theta$$

$$\sigma'_x = \frac{-۱۵۰ - ۷۰۰}{۲} + \frac{-۱۵۰ + ۷۰۰}{۲} Cos\ ۶۰° + ۰ = -۲۸۷/۵ kPa$$

$$\sigma'_y = \frac{-۱۵۰ - ۷۰۰}{۲} - \frac{-۱۵۰ + ۷۰۰}{۲} Cos\ ۶۰ - ۰ = -۵۶۲/۵ kPa$$

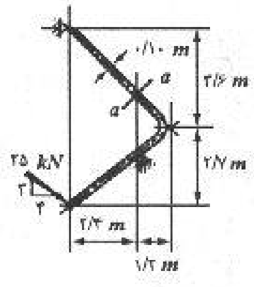
$$\tau'_{xy} = -\frac{۱۵۰ + ۷۰۰}{۲} Sin\ ۶۰ + ۰ = -۳۶۸ kPa$$

برای اینکه لایه‌های سنگ روی هم نلغزند باید شرط زیر برقرارباشد:

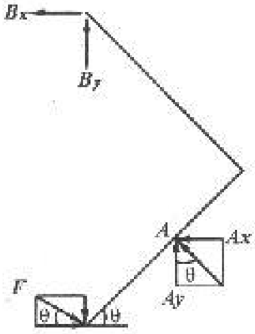
$$\tau'_{xy} - \mu\ \sigma'_x < ۸۵۰$$

$۳۶۸ - ۰/۵(۲۸۷/۵) = ۲۲۴/۳ < ۸۵۰$ پس مجاز می‌باشد.

۱۰-۱۰. یک میلهٔ خمیده به ابعاد ۱۰۰ × ۱۰۰ میلی‌متر، مطابق شکل بارگذاری شده است. مطلوب است تعیین حالت تنش در نقطه‌ای که در روی محور این میله در مقطع $a-a$ واقع است. نتایج را به صورت ترسیمی در روی یک جزء بسیار کوچک نشان دهید. محاسبهٔ تنشهای اصلی لازم نیست.



مسأله ۱۰-۱۰



$$\circlearrowleft + \sum M_B = 0 : F\cos\theta\,(2/7 + 3/6)$$

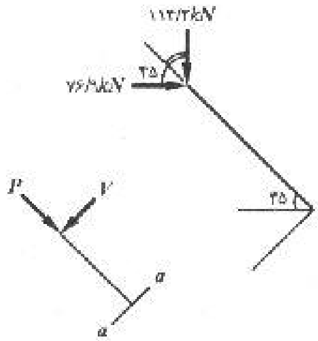
$$+ A_y\,(2/4) - A_x\,(3/6 + 2/7 - 2/4\tan\theta) = 0$$

$$F = 25\,kN \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36/87^\circ, \quad A_x = A_y \tan\theta$$

$$\Rightarrow Ay = 129/2\,kN \Rightarrow A_x = 96/9\,kN$$

$$\sum F_x = 0 : F\cos\theta - A_x - B_x = 0 \Rightarrow B_x = -76/9\,kN$$

$$\sum F_y = 0 : -F\sin\theta + A_y + B_y = 0 \Rightarrow B_y = -114/2\,kN$$



$$P = 76/9 \times \cos 45^\circ + 114/2 \times \cos 45^\circ = 135/13\,kN$$

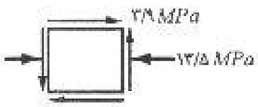
$$V = 114\sin 45^\circ - 76/9 \times \sin 45^\circ = 26/23\,kN$$

$$M = V \times x = 26/23 \times \left(\frac{2/4}{\cos 45}\right) = 89\,kN.m$$

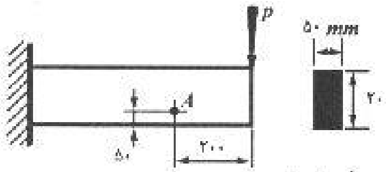
$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{135130}{100 \times 100} = 13/5\,MPa$$

نقطه‌ای که روی محور میله قرار دارد چون روی تار خنثی واقع شده، تنش ناشی از خمش بر آن اثر نمی‌کند امّا نیروی برشی برابر است با:

$$\tau = \frac{3V}{2A} = \frac{3 \times 26/23 \times 10^3}{2 \times 100 \times 100} = 3/9\,MPa$$

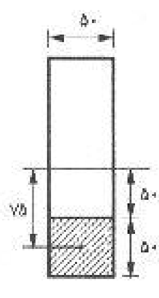


۱۰-۱۱. حداکثر تنش برشی در نقطهٔ A از تیر زیر مساوی ۰/۹ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد. مطلوب است تعیین مقدار نیروی P. از وزن تیر صرف‌نظر نمایید.



مسئلهٔ ۱۰-۱۱

$$\tau_A = \frac{VQ_A}{It} = \frac{P(50 \times 50)(75)}{\frac{1}{12}(50)(200)^3(50)} = 1/125 \times 10^{-4} P$$

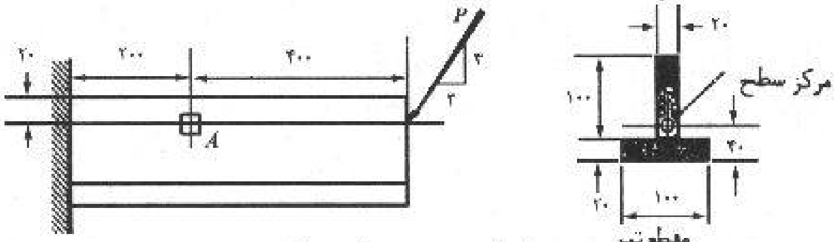


$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{(200P)(50)}{\frac{1}{12}(50)(200)^3} = 3 \times 10^{-4} P$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{2}\right)^2 + \tau_A^2} = 1/875 \times 10^{-4} P$$

$$0/9 = 1/875 \times 10^{-4} P \Rightarrow P = 4800\,N$$

۱۰-۱۲. لچکی زیر توسط نیروی متمرکز p بارگذاری شده است. در اثر این نیرو در لچکی نیروی محوری فشاری، و لنگر خمشی تولید می‌شود لیکن در آن هیچگونه پیچشی ایجاد نمی‌گردد. (الف) حالت تنش در نقطهٔ A را در روی یک جزء سطح نشان دهید. (ب) اگر کرنش افقی (طولی) در نقطهٔ A مساوی 2×10^{-4} میلی‌متر بر میلی‌متر و ضریب ارتجاعی مصالح تیر 2×10^{5} نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، مقدار نیروی P چقدر می‌باشد. لنگر ماند مقطع در حول محور خنثی را مساوی $5/33 \times 10^{6}$ میلی‌متر به توان ۴ فرض نمایید.



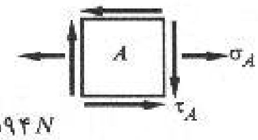
(ابعاد برحسب میلی‌متر)

مسئله ۱۰-۱۲

$$\sigma_1 = \frac{My}{I} = \frac{\left(\frac{4}{5} P \times 400\right)(60)}{5/33 \times 10^{6}} = 36 \times 10^{-4} P$$

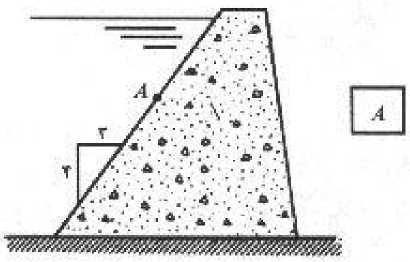
$$\sigma_2 = \frac{F}{A} = \frac{-\frac{3}{5} P}{20 \times 100 + 100 \times 20} = -1/5 \times 10^{-4} P \quad \sigma_A = \sigma_1 + \sigma_2 = 34/5 \times 10^{-4} P$$

$$\tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{-\left(\frac{4}{5} P\right)\left[(20 \times 20)(70)\right]}{(5/33 \times 10^{6})(20)} = 2/1 \times 10^{-4} P$$



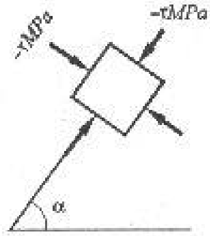
$$\sigma_A = E\,\varepsilon_A \Rightarrow 34/5 \times 10^{-4} P = (2 \times 10^{5})(2 \times 10^{-4}) \Rightarrow P = 11594 N$$

۱۰-۱۳. در نقطهٔ A از سطح بالادست سد نشان داده شده در شکل، فشار آب مساوی ۲- نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد. تنش فشاری اندازه‌گیری شده به موازات رویه مساوی ۳- نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد. مطلوب است محاسبهٔ تنشهای σ_x و σ_y و τ_{xy} و نمایش ترسیمی آنها در روی جزء سطح نشان داده شده.



مسئله ۱۰-۱۳

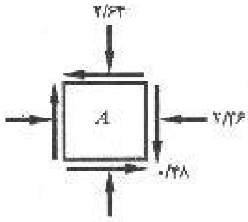
$\alpha = \tan^{-1}(\frac{۴}{۳}) = ۵۳/۱$



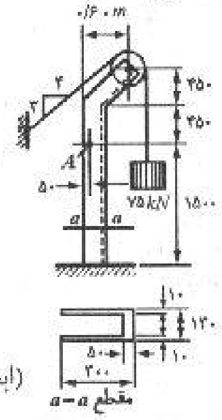
$$\sigma_x = \frac{-۳-۲}{۲} + \frac{-۳+۲}{۲} Cos\,(-۱۰۶/۲) + ۰ = -۲/۳۶\,MPa$$

$$\sigma_y = \frac{-۳-۲}{۲} - \frac{-۳+۲}{۲} Cos\,(-۱۰۶/۲) + ۰ = -۲/۶۴\,MPa$$

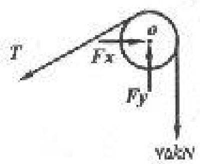
$$\sigma_{xy} = \frac{-۳+۲}{۲} Sin\,(-۱۰۶/۲) + ۰ = -۰/۴۸\,MPa$$



۱۰-۱۴. مطلوب است نمایش حالت تنش در نقطهٔ A از جرثقیل زیر. نتایج را در روی یک جزء سطح که اضلاع آن افقی و قائم می‌باشند، نشان دهید. لنگر ماند مقطع در حول محور خنثی مساوی $۱۰^۶ \times ۹۱$ میلی‌متر به توان ۴ می‌باشد.



(ابعاد بر حسب میلی‌متر) مسأله ۱۰-۱۴



$\sum M_o = ۰ \circlearrowleft + \;:\; T \times R = ۷۵ \times R \Rightarrow T = ۷۵\,kN$

$\sum F_x = ۰ \;:\; F_x = \frac{۴}{۵} T = ۶۰\,kN$

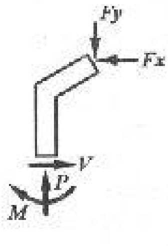
$\sum F_y = ۰ \;:\; F_y = ۷۵ + \frac{۳}{۵} T = ۱۲۰\,kN$

$V = F_x = ۶۰\,kN$

$P = F_y = ۱۲۰\,kN$

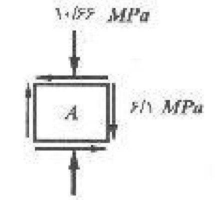
$M = F_x \times ۹۰۰ - F_y \times ۵۵۰ = -۱۲۰۰۰\,(kN.mm)$

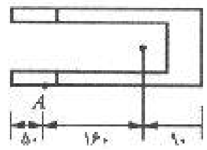
$\bar{y} = \frac{(۱۳۰ \times ۵۰)(۲۵) + (۲۵۰ \times ۱۰)(۱۷۵) \times ۲}{۱۳۰ \times ۵۰ + ۲۵۰ \times ۱۰ \times ۲} = ۹۰\,mm$ از راست

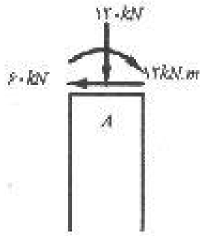


$$\sigma_b = \frac{My}{I} - \frac{P}{A} = \frac{(۱۲ \times ۱۰^۶) \times ۱۶۰}{۹۱ \times ۱۰^۶} - \frac{۱۲۰ \times ۱۰^۳}{۱۱۵۰۰} \Rightarrow \sigma_A = ۱۰/۶۶\,MPa$$

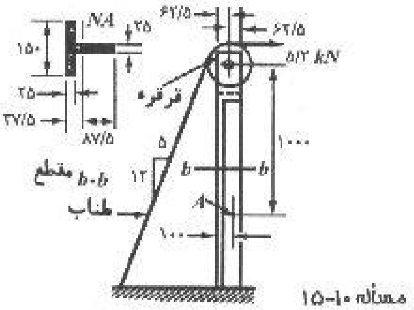
$$\tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{(۶۰ \times ۱۰^۳)\left[(۵۰ \times ۱۰ \times ۲)(۱۸۵)\right]}{(۹۱ \times ۱۰^۶)(۱۰ \times ۲)} = ۶/۱\,MPa$$





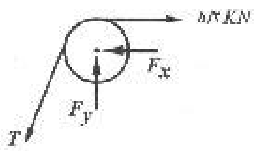


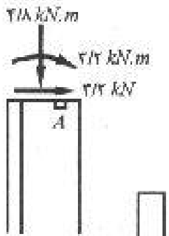
۱۰-۱۵. مطلوب است محاسبهٔ حالت تنش در نقطهٔ A از سازهٔ زیر. نتایج را در روی یک جزء سطح که اضلاع آن افقی و قائم می‌باشند، نشان دهید. سطح مقطع عضو قائم مساوی ۶۲۵۰ میلی‌مترمربع و لنگر ماند آن در حول محور خنثی مساوی $۸/۱۶ \times ۱۰^۶$ میلی‌متر به توان ۴ می‌باشد.

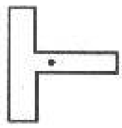


مسئله ۱۰-۱۵

(ابعاد بر حسب میلی‌متر)



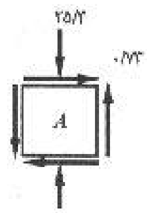




$$T = ۵/۲\,kN$$

$$\sum F_x = ۰ : ۵/۲ - F_x - \frac{۵}{۱۳}T = ۰ \rightarrow F_x = ۳/۲\,kN$$

$$\sum F_y = ۰ : F_y = T_y = \frac{۱۲}{۱۳}T = ۴/۸\,kN$$



$$V = ۳/۲\,kN$$

$$P = ۴/۸\,kN$$

$$M = ۳/۲ \times ۱ = ۳/۲\,kN.m$$

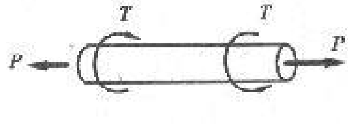
$$\sigma_A = -\frac{My}{I} - \frac{P}{A} = -\frac{(۳/۲ \times ۱۰^۶)(-۸۷/۵ + ۲۵)}{۸/۱۶ \times ۱۰^۶} - \frac{۴/۸ \times ۱۰^۳}{۶۲۵۰} = -۲۵/۳\,MPa$$

$$\tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{-۴۸۰۰\left[(۲۵ \times ۲۵)(۸۷/۵ - ۱۲/۵)\right]}{(۸/۱۶ \times ۱۰^۶)(۲۵)} = -\,۰/۷۳\,MPa$$

۱۰-۱۶. یک میله کوتاه استوانه‌ای به قطر ۴۰ میلی‌متر تحت تأثیر نیروی محوری π ۲۰ کیلونیوتن و لنگر پیچشی π ۰/۲ کیلونیوتن متر قرار دارد. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی (تنش برشی اصلی). نتایج را به‌صورت ترسیمی در روی یک جزء سطح مناسب نمایش دهید.

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{T\left(\frac{d}{۲}\right)}{\frac{\pi}{۳۲}(d)^{۴}} = \frac{۱۶\,T}{\pi\, d^{۳}} = \frac{۱۶ \times (۰/۲\pi \times ۱۰^{۶})}{\pi\,(۴۰)^{۳}} \Rightarrow \tau = ۵۰\ N/mm^{۲}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{\frac{\pi d^{۲}}{۴}} = \frac{۴ \times (۲۰۰۰۰\pi)}{\pi\,(۴۰)^{۲}} \Rightarrow \sigma = ۵\ N/mm^{۲}$$



$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{۲}\right)^{۲} + \tau^{۲}} \Rightarrow \tau_{max} = ۵۰/۰۶\ N/mm^{۲}$$

۱۰-۱۷. یک محور استوانه‌ای کوتاه به قطر ۴۰ میلی‌متر تحت تأثیر نیروی محوری کششی π ۴۰ کیلونیوتن قرار دارد. چه لنگر پیچشی می‌توان بر این محور وارد کرد بدون اینکه تنش برشی حداکثر (تنش برشی اصلی)، از ۱۳۰ مگاپاسکال (نیوتن بر میلی‌متر مربع) تجاوز کند.

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{۱۶T}{\pi d^{۳}} \qquad \sigma = \frac{P}{A} = \frac{۴P}{\pi\, d^{۲}} = \frac{۴ \times ۴۰\pi \times ۱۰^{۳}}{\pi(۴۰)^{۲}} = ۱۰۰\ MPa$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{۲}\right)^{۲} + \tau^{۲}} \Rightarrow \tau^{۲} = \tau_{max}{}^{۲} - \left(\frac{\sigma}{۲}\right)^{۲} = ۱۳۰^{۲} - ۵۰^{۲} = ۱۴۴۰۰ \Rightarrow \tau = ۱۲۰\ MPa$$

$$\frac{۱۶T}{\pi d^{۳}} = ۱۲۰ \Rightarrow T = ۱/۵ \times ۱۰^{۶}\ (N.mm) = ۱/۵ kN.m$$

۱۰-۱۸. یک محور استوانه‌ای به قطر ۲۰ میلی‌متر تحت اثر توأم لنگر پیچشی و لنگر خمشی خالص قرار دارد. با فرض اینکه در هر مقطع دلخواه از محور، بزرگترین تنش کششی اصلی ناشی از بارهای وارده ۱۶۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع، و در همان نقطه بزرگترین تنش کششی ناشی از لنگر خمشی مساوی ۱۲۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، مطلوب است تعیین لنگر خمشی و لنگر پیچشی وارده.

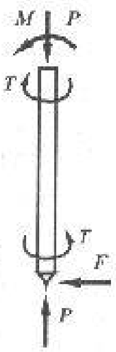
$$\sigma_b = \frac{Mc}{I} \Rightarrow M = \frac{\pi d^{۳}}{۳۲}\,.\,\sigma_b = \frac{\pi(۲۰)^{۳}}{۳۲} \times (۱۲۰) = \underline{۳۰\,\pi\ N.m}$$

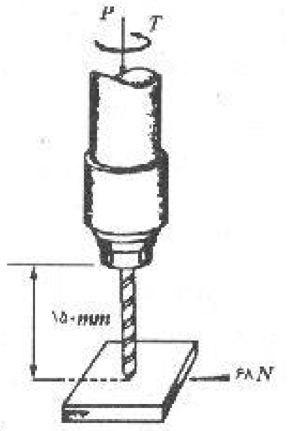
$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_b}{۲} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{۲}\right)^{۲} + \tau^{۲}} \Rightarrow \tau^{۲} = \left(\sigma_{max} - \frac{\sigma_b}{۲}\right)^{۲} - \left(\frac{\sigma_b}{۲}\right)^{۲} = (۱۶۰ - ۶۰)^{۲} - ۶۰^{۲} = ۶۴۰۰$$

$$\Rightarrow \tau = ۸۰\ N/mm^{۲} \qquad \tau = \frac{Tc}{J} = \frac{۱۶T}{\pi d^{۳}} = ۸۰ \Rightarrow \underline{T = ۴۰\,\pi\ N.m}$$

۱۰-۱۹. به متهٔ نشان داده شده در شکل، در حین کار نیروی محوری ۶/۷۸ کیلونیوتن و لنگر پیچشی ۲۷/۲ نیوتن‌متر تأثیر می‌کنند. اگر در حین سوراخ کردن، نیروی افقی ۶۸ نیوتن به قطعه‌ای که سوراخ می‌شود، وارد گردد، مقدار بزرگترین تنش اصلی که در بالای مته وارد می‌شود چقدر

است. بحرانی‌ترین نقطهٔ تحت تنش در روی مته در کجا قرار دارد. قطر مته ۱۲ میلی‌متر، سطح مقطع آن ۱۱۳ میلی‌مترمربع و لنگر ماند آن ۱۰۲۰ میلی‌متر به توان ۴ و لنگر ماند قطبی آن ۲۰۴۰ میلی‌متر به توان ۴ می‌باشد.





مسئله ۱۰-۱۹

$$\tau_۱ = \frac{Tc}{J} = \frac{(۲۷۲۰۰)(۶)}{۲۰۴۰} \Rightarrow \tau_۱ = ۸۰\ N/mm^۲$$

$$\tau_۲ = \frac{۳}{۲} \times \frac{F}{A} = \frac{۳}{۲} \times \frac{۶۸}{۱۱۳} \Rightarrow \tau_۲ = ۰/۹\ N/mm^۲$$

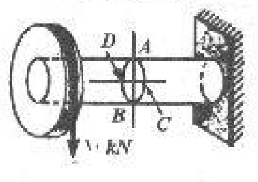
$$M = F.L = ۶۸ \times ۱۵۰ = ۱۰۲۰۰\ N.mm$$

$$\sigma = -\frac{Mc}{I} - \frac{P}{A} = -\frac{(۱۰۲۰۰)(۶)}{۱۰۲۰} - \frac{۶۷۸۰}{۱۱۳} = -۱۲۰\ N/mm^۲$$

$$\sigma_{۱,۲} = \frac{\sigma}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{۲}\right)^۲ + \tau^۲} = -\frac{۱۲۰}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{-۱۲۰}{۲}\right)^۲ + (۸۰/۹)^۲} \Rightarrow \sigma_۱ = -۱۶۰/۷\ N/mm^۲$$

بحرانی‌ترین نقطه در سطح بیرونی بالای مته واقع است.

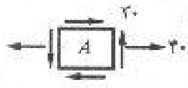
۱۰-۲۰. یک محور استوانه‌ای توپر همانند شکل بارگذاری شده است. در مقطع $ABCD$ تنشهای ناشی از نیروی ۱۰ کیلونیوتنی و وزن محور و دیسک انتهایی به شرح زیر می‌باشند؛ حداکثر تنش خمشی مساوی ۴۰، حداکثر تنش پیچشی مساوی ۳۰ و حداکثر تنش برشی ناشی از V مساوی ۶ (تمام تنشها برحسب نیوتن بر میلی‌متر مربع) هستند. در روی هر یک از جزء سطحهای واقع در نقاط A و B و C و D مقدار و امتداد تنشهای وارده را نشان دهید. در هر حالت بیان کنید که جزء سطح از چه امتدادی مشاهده می‌شود. (ب) با استفاده از دایرهٔ مور مقدار و امتداد تنشهای اصلی و حداکثر تنش برشی در نقطهٔ A را پیدا کنید.



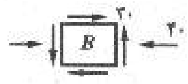
مسئله ۱۰-۲۰

$\sigma_M = ۴۰\ N/mm^۲$, $\tau_T = ۳۰\ N/mm^۲$, $\tau_V = ۶\ N/mm^۲$

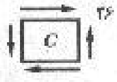
$\sigma_A = \sigma_M = ۴۰\ N/mm^۲$, $\tau_A = \tau_T = ۳۰\ N/mm^۲$



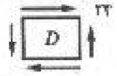
$\sigma_B = \sigma_M = ۴۰\ N/mm^۲$, $\tau_B = \tau_T = ۳۰\ N/mm^۲$



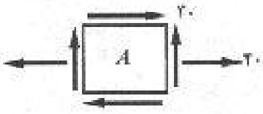
$\sigma_C = \frac{My}{I}, y = ۰ \to \sigma_C = ۰, \quad \tau_C = \tau_T + \tau_V = ۳۶\, N/mm^۲$

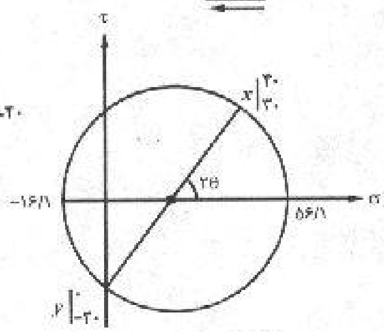


$y_D = ۰ \to \sigma_D = ۰ \quad , \quad \tau_D = \tau_T + \tau_V = ۲۴\, N/mm^۲$



$Center = \frac{۴۰ + ۰}{۲} = ۲۰$





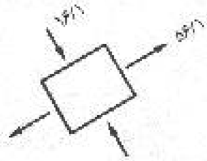
$X(۴۰, ۳۰), Y(۰, -۳۰)$

$R = \sqrt{\left(\frac{۴۰}{۲}\right)^۲ + ۳۰^۲} = ۳۶/۱$

$\sigma_۱ = ۲۰ + ۳۶/۱ = ۵۶/۱$

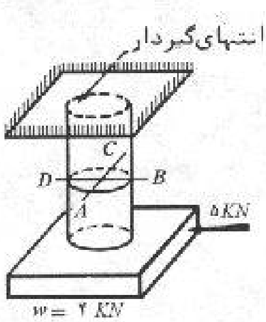
$\sigma_۲ = ۲۰ - ۳۶/۱ = -۱۶/۱$

$۲\theta = tan^{-۱}\left(\frac{۳۰}{۴۰ - ۲۰}\right) = ۵۶/۳ \Rightarrow \theta = ۲۸/۱۵°$



$\tau_{max} = R = ۳۶/۱\, MPa$

۱۰-۲۱. مطابق شکل، یک میلهٔ استوانه‌ای به قطر ۵۰ میلی‌متر در حالی‌که یک بلوک مکعب مستطیل به انتهای آزاد آن آویزان می‌باشد، مفروض است. علاوه بر این، یک نیروی افقی که به‌طور خارج از مرکز به بلوک وارد می‌شود، در شکل نشان داده شده است. از تحلیل تنش در مقطع $ABCD$ نتایج زیر به‌دست آمده است: حداکثر تنش خمشی مساوی ۱۰ مگاپاسکال، حداکثر تنش پیچشی مساوی ۳ مگاپاسکال و حداکثر تنش برشی ناشی از V مساوی ۴ مگاپاسکال و تنش محوری مستقیم مساوی ۲ مگاپاسکال. در روی یک جزء کوچک واقع در نقطهٔ A مقدار و امتداد تنشهای وارده را نشان دهید. ضلع فوقانی جزء سطح را منطبق بر مقطع $ABCD$ در نظر بگیرید. (ب) با استفاده از دایرهٔ مور، مطلوب است تعیین امتداد و مقدار تنش برشی حداکثر(اصلی) و تنش تائم همراه با آن را در نقطهٔ A.



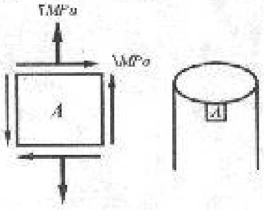
مسئله ۱۰-۲۱

چون نقطه A روی محور خنثی قرار دارد تنش خمشی برای آن صفر است:

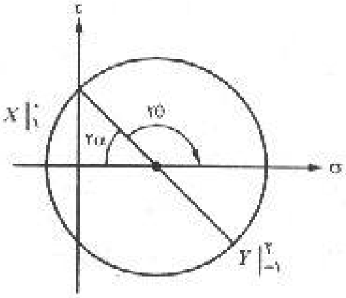
$\sigma_b = ۰$

$\sigma_A = \sigma_L = ۲\, MPa$

$\tau_A = \tau_V - \tau_T = ۴ - ۳ = ۱\, MPa$



$Center = \frac{۰ + ۲}{۲} = ۱ \qquad X(۰, ۱) \quad و \quad Y(۲, -۱)$



$$R=\sqrt{\left(\frac{-۲}{۲}\right)^{۲}+۱^{۲}}=\sqrt{۲}$$

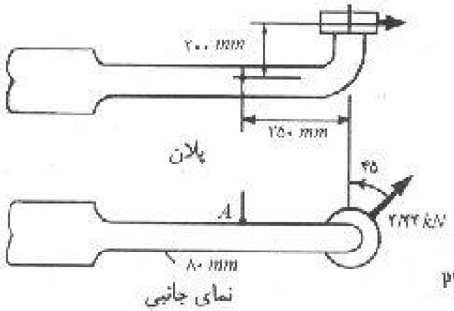
$$\alpha=tan^{-1}\left(\frac{۱}{۱}\right)=۴۵^\circ\rightarrow\alpha=۲۲/۵^\circ$$

$$\theta=۹۰-۲۲/۵\rightarrow\theta=۶۷/۵^\circ$$

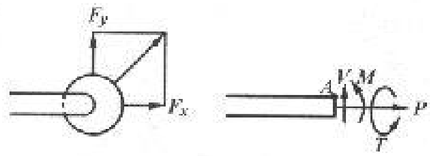
$$\tau_{max}=\sqrt{۲}=۱/۴۱\,MPa$$

تنش قائم همراه تنش برشی ماکزیمم: $\sigma=۱\,MPa$

۱۰-۲۲. مطلوب است تعیین تنشهای اصلی در نقطهٔ A از شکل زیر. نتایج را به‌صورت ترسیمی در روی یک جزء سطح نشان دهید. از وزن عضو صرف‌نظر نمایید.



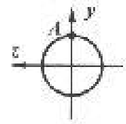
مسئلهٔ ۱۰-۲۲



$$P=F_x=۴/۴۴\times Sin\,۴۵^\circ=۳/۱۴\,kN$$

$$V=F_y=۴/۴۴\times Cos\,۴۵^\circ=۳/۱۴\,kN$$

$$M_y=F_x\cdot d_۱=۳/۱۴\times ۲۰۰=۶۲۸\,kN.mm$$



$$M_z=F_y\cdot d_۲=۳/۱۴\times ۲۵۰=۷۸۵\,kN.mm$$

$$T=F_y\cdot d_۱=۳/۱۴\times ۲۰۰=۶۲۸\,kN.mm$$

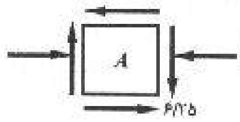
$$\sigma_L=\frac{F_x}{A}=\frac{۳۱۴۰}{\frac{\pi}{۴}(۸۰)^{۲}}=۰/۶۲۵\,MPa$$

$$\sigma_b=-\frac{M_z\,c}{I}=-\frac{(۷۸۵\times ۱۰^{۳})(۴۰)}{\frac{\pi}{۶۴}(۸۰)^{۴}}=-۱۵/۶۲\,MPa$$

با توجه به محل نقطه A تنش برشی ناشی از نیروی برشی نیز برای آن وجود ندارد:

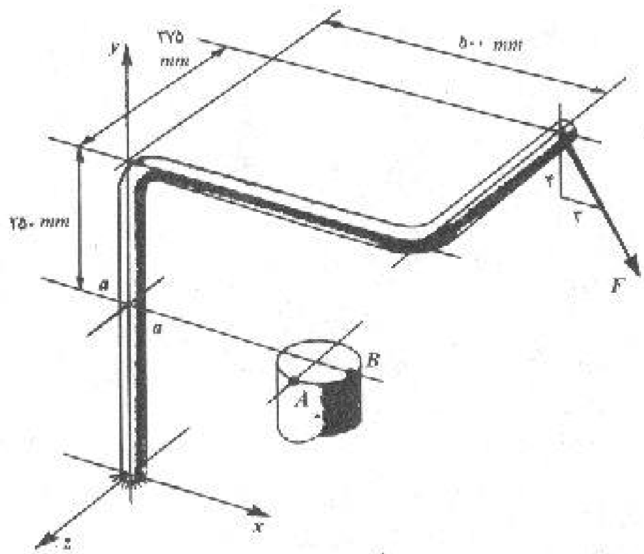
$$\tau_V=۰$$

$$\tau_T=\frac{Tr}{J}=\frac{۱۶T}{\pi\,d^{۳}}=\frac{۱۶\times ۶۲۸\times ۱۰^{۳}}{\pi(۸۰)^{۳}}=۶/۲۵\,MPa$$



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{2}\right)^2 + \tau_A^2} = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + (6/25)^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 17/26\, MPa \\ \sigma_2 = -2/27\, MPa \end{cases}$$

۱۰-۲۳. مطابق شکل، میله‌ای استوانه‌ای به قطر ۵۰ میلی‌متر در انتهای آزاد خود تحت تأثیر نیروی مایل F مساوی 225π نیوتن قرار دارد. (اگر از بالا نگاه کنیم، نیروی F به موازات محور xها دیده می‌شود). مطلوب است تعیین مقدار و امتداد تنشهای ناشی از F در روی جزء سطحهای واقع در نقاط A و B از مقطع a-a. نتایج را در روی یک جزء سطح مناسب به‌طور ترسیمی نشان دهید. محاسبهٔ تنشهای اصلی لازم نمی‌باشد.



مسأله ۱۰-۲۳

نیروی F را به دو مؤلفه F_x و F_y تجزیه می‌کنیم:

$$F_x = \frac{3}{5} \times F = 135\,\pi\ (N)$$

$$F_y = \frac{4}{5} F = 180\,\pi\ (N)$$

نیروی F_x در مقطع $(a-a)$ ایجاد نیروی برشی می‌کند:

$$V = F_x = 135\pi\ (N)$$

نیروی F_y در مقطع $(a-a)$ ایجاد یک نیروی فشاری می‌کند:

$$P = F_y = 180\,\pi\ (N)$$

حاصل‌ضرب F_x در فاصله $250\,mm$ یک ممان خمشی حول محور z روی مقطع $(a-a)$ ایجاد می‌کند:

$$M_{1z} = 135\,\pi \times 250 = 33750\,\pi\ (N.mm)$$

همچنین حاصل‌ضرب F_y در فاصله mm ۵۰۰ نیز ممان خنثی دیگری را حول z در مقطع مذکور موجب می‌شود.

$$M_{\text{۲}z} = ۱۸۰\,\pi \times ۵۰۰ = ۹ \times ۱۰^{۴}\,\pi\ (N.mm)$$

هر دو ممان فوق هم‌جهت و در جهت منفی محور z می‌باشند بنابراین:

$$M_z = M_{\text{۱}} + M_{\text{۲}} = -\ ۱۲۳۷۵۰\,\pi\ (N.m)$$

امّا حاصل‌ضرب F_y در فاصله mm۳۷۵ ممانی حول محور x در جهت منفی ایجاد می‌کند:

$$M_x = ۱۸۰\,\pi \times ۳۷۵ = -۶۷۵۰۰\,\pi\ (N.mm)$$

تنها عاملی که باعث ایجاد پیچش در مقطع $(a-a)$ می‌شود حاصلضرب نیروی F_x در فاصله mm۳۷۵ می‌باشد:

$$T_y = ۱۳۵\,\pi \times ۳۷۵ = -۵۰۶۲۵\,\pi\ (N.mm)$$

علامت لنگرها را می‌توان از طریق ضرب برداری $(\vec{r} \times \vec{F})$ بدست آورد:

$$M_x = (-۳۷۵k) \times (-۱۸۰\,\pi j) = -۶۷۵۰۰\,\pi\, i$$

حال می‌توان تنشهای وارد بر نقاط را بدست آورد.
نقاط A و B در مورد تنشهای ناشی از بار محوری و لنگر پیچشی یکسان می‌باشند بنابراین:

$$\sigma_L = \frac{P}{A} = \frac{۱۸۰\,\pi}{\frac{\pi}{۴}(۵۰)^{۲}} = ۰/۲۸۸\,MPa \quad \text{فشاری}$$

$$\tau_T = \frac{Tc}{J} = \frac{۱۶T}{\pi d^{۳}} = \frac{(۱۶)(۵۰۶۲۵\,\pi)}{\pi(۵۰)^{۳}} = ۶/۴۸\,MPa$$

تنش خمشی و تنش برشی ناشی از نیروی برشی برای نقطه A:

$$\sigma_b = \frac{M_x z}{I_x} = \frac{۳۲\,M_x}{\pi\,d^{۳}} = \frac{۳۲(۶۷۵۰۰)\pi}{\pi(۵۰^{۳})} = ۱۷/۲۸\,MPa \qquad \text{کششی}$$

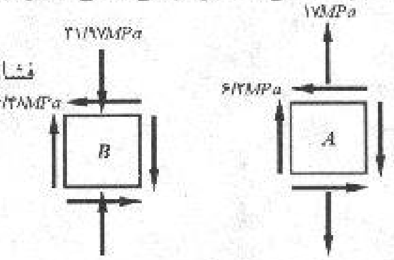
$$\tau_V = \frac{VQ}{It} = \frac{۴}{۳}\left(\frac{V}{A}\right) = \frac{۴}{۳}\,\frac{F_x}{\frac{\pi\,d^{۲}}{۴}} = ۰/۲۸۸\,MPa$$

با توجه به موارد فوق کل تنش وارد بر نقطه A عبارتست از:

$$\sigma_A = ۱۷/۲۸ - ۰/۲۸۸ = ۱۷\,MPa \quad \text{کششی}$$

$$\tau_A = ۶/۴۸ - ۰/۲۸۸ = ۶/۲\,MPa$$

تنش خمشی و تنش برشی ناشی از نیروی برشی برای نقطه B:



$$\sigma_b = \frac{M_z x}{I_x} = \frac{(۱۲۳۷۵۰\,\pi)\left(\frac{۵۰}{۲}\right)}{\frac{\pi(۵۰)^۴}{۶۴}} = ۳۱/۶۸\,MPa \quad \text{فشاری}$$

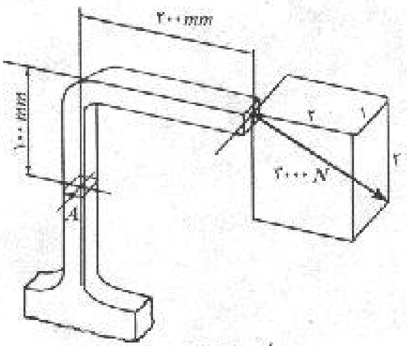
$$\tau_V = ۰$$

بنابراین کل تنش وارد بر نقطه B عبارتست از:

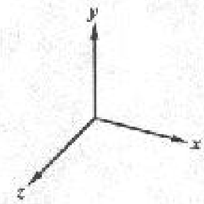
$$\sigma_B = ۳۱/۶۸ + ۰/۲۸۸ = ۳۱/۹۷\,MPa \quad \text{فشاری}$$

$$\tau_B = ۶/۴۸\,MPa$$

۱۰-۲۴. مطابق شکل، یک میله با مقطع مربع به ابعاد ۱۲ × ۱۲ میلی‌متر، تحت تأثیر نیروی مایل ۳۰۰۰ نیوتنی در انتهای آزاد خود قرار دارد. مطلوب است: (الف) تعیین حالت تنش ناشی از نیروی وارده در نقطه A. نتایج را در روی یک جزء سطح مناسب به‌طور ترسیمی نمایش دهید. (ب) تعیین مقدار و امتداد تنشهای اصلی.



مسأله ۱۰-۲۴



$$\sqrt{۲^۲ + ۲^۲ + ۱^۲} = ۳$$

$$F_x = \frac{۲}{۳}(۳۰۰۰) = ۲۰۰۰\,N$$

$$F_y = \frac{۲}{۳}(۳۰۰۰) = ۲۰۰۰\,N$$

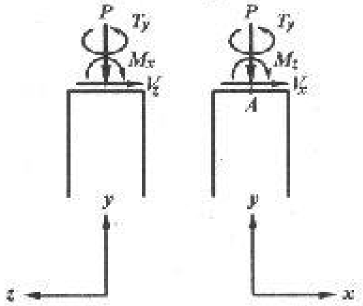
$$F_z = \frac{۱}{۳}(۳۰۰۰) = ۱۰۰۰\,N$$

$$M_x = ۱۰۰ \times F_z = -۱۰^۵\ (N.mm)$$

$$M_z = ۱۰۰ \times F_x + ۲۰۰ \times Fy = -۶ \times ۱۰^۵\ (N.mm)$$

$$T_y = ۲۰۰ \times F_z = +۲ \times ۱۰^۵\ (N.mm)$$

نیروهای F_x و F_z نیروی برشی در صفحه مورد مطالعه ایجاد می‌کنند. و نیروی F_y تولید نیروی فشاری روی صفحه می‌نماید.



$$\sigma_L = \frac{P}{A} = \frac{F_y}{A} = \frac{۲۰۰۰}{۱۲\times ۱۲} = ۱۳/۸۹\,MPa \qquad \text{فشاری}$$

با توجه به محل نقطه A ممان M_z هیچگونه تنشی روی آن ایجاد نمی‌کند.

$$\sigma_b = \frac{M_x z}{I} = \frac{(۱۰^۵)(۶)}{\frac{۱}{۱۲}(۱۲)^۴} = ۳۴۷/۲\,MPa \qquad \text{کششی}$$

نیروی برشی V_z هم روی نقطه A تنش برشی ایجاد نمی‌کند امّا تنش برشی ناشی از V_x عبارتست از:

$$\tau_V = \frac{۳}{۲}\left(\frac{V}{A}\right) = \frac{۳}{۲}\times\frac{۲۰۰۰}{۱۲\times ۱۲} = ۲۰/۸\,MPa$$

$$\tau_T = \frac{T}{\alpha bc^۲} = \frac{۲\times ۱۰^۵}{(۰/۲۰۸)(۱۲)(۱۲)^۲} = ۵۵۶$$

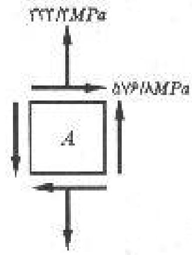
از جدول صفحه ۱۱۳: $\frac{b}{c} = ۱ \to \alpha = ۰/۲۰۸$

تنشهای برشی ناشی از نیروی برشی و لنگر پیچشی روی نقطه A هم‌جهت می‌باشند.

$$\tau_A = \tau_V + \tau_T = ۲۰/۸ + ۵۵۶ = ۵۷۶/۸\,MPa$$

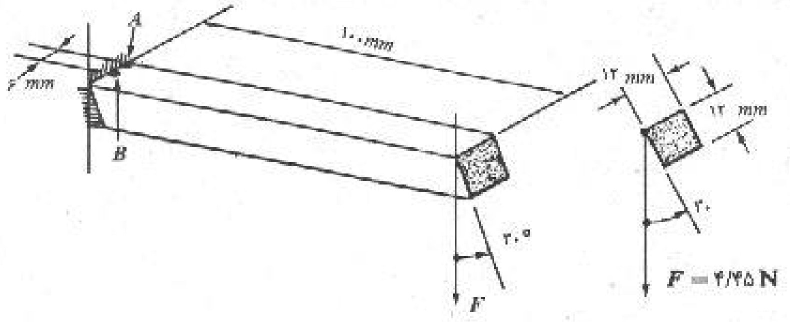
$$\sigma_A = ۳۴۷/۲ - ۱۳/۸۹ = ۳۳۳/۳\,MPa$$

$$\sigma_{۱,۲} = \frac{\sigma_A}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{۲}\right)^۲ + \tau_A^۲} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_۱ = ۷۶۷\,MPa \\ \sigma_۲ = -۴۳۴\,MPa \end{cases}$$

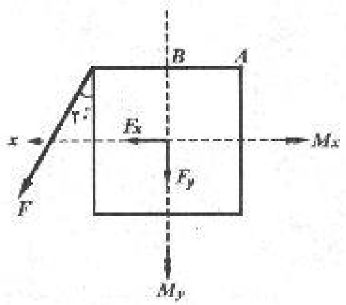


$$\tan ۲\theta_p = \frac{۲\times ۵۷۶/۸}{۰ - ۳۳۳/۳} = -۳/۴۶ \Rightarrow ۲\theta_p = ۱۸۰ - ۷۳/۴ = ۱۰۶ \to \theta_p = ۵۳^\circ$$

۱۰-۲۵. مطابق شکل یک میله با مقطع مربع به ابعاد ۱۲ × ۱۲ میلی‌متر و طول ۱۰۰ میلی‌متر، در یک انتها به صورت گیردار تکیه داده شده است. سطوح جانبی میله به‌طور شاقولی قرار نگرفته‌اند، بلکه مطابق شکل با امتداد شاقولی زاویه‌ای مطابق ۳۰ درجه می‌سازند. مطلوب است محاسبه تنشهای ناشی از نیروی شاقولی F در نقاط A و B. اثر تمرکز تنش را نادیده بگیرید. نتایج را در روی یک جزء سطحی که از بالا دیده می‌شود، نشان دهید. محاسبه تنشهای اصلی لازم نیست.



مسأله ۱۰-۲۵



$$F_x = F \sin ۳۰^\circ = ۲/۲۲۵\,N$$

$$F_y = F \cos ۳۰^\circ = ۳/۸۵۴\,N$$

$$a = ۱۲\,mm$$

$$T = F_x \times \frac{a}{۲} + F_y \times \frac{a}{۲} = ۳۶/۴۷۳\,N.mm$$

$$M_x = F_y . l = ۳/۸۵۴ \times ۱۰۰ = ۳۸۵/۴\,N.mm$$

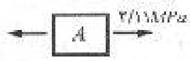
$$M_y = F_x . l = ۲/۲۲۵ \times ۱۰۰ = ۲۲۲/۵\,N.mm$$

$$I_x = I_y = \frac{a^۴}{۱۲} = ۱۷۲۸\,mm^۴$$

نقطه A:

$$\sigma_A = \frac{M_x \times (\frac{a}{۲})}{I_x} + \frac{M_y \times \frac{a}{۲}}{I_y} = ۲/۱۱\,N/mm^۲$$

$$\tau_A = ۰$$

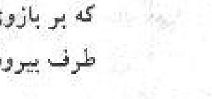


نقطه B:

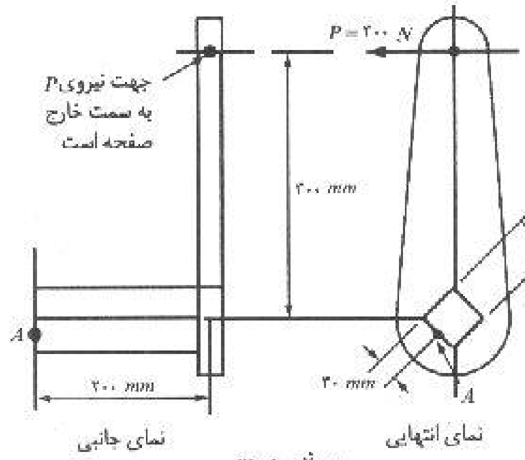
$$\sigma_B = \frac{M_x \times (\frac{a}{۲})}{I_x} = ۱/۳۴\,N/mm^۲$$

$\tau_B = F_x$ تنش برشی ناشی از $+\ T$ تنش برشی ناشی از $= \frac{۳}{۲}\frac{V}{A} + \frac{T}{\alpha a^۳}$

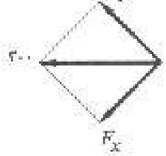
$$= \frac{۳}{۲}\frac{F_x}{a^۲} + \frac{T}{۰/۲۰۸\,a^۳} \Rightarrow \tau_B = ۰/۱۲۵\,N/mm^۲$$



۱۰-۲۶. مطابق شکل میله‌ای با مقطع مربع و به ابعاد ۶۰ × ۶۰ میلی‌متر، در یک انتها به صورت گیردار تکیه داده شده است. مطلوب است محاسبهٔ حالت تنش در نقطهٔ A ناشی از نیروی P که بر بازوی میله وارد می‌شود. نتایج را به صورت ترسیمی در روی یک جزء سطح که از طرف بیرون دیده می‌شود، نمایش دهید. از تمرکز تنش صرف‌نظر نمایید.



مسئله ۱۰-۲۶

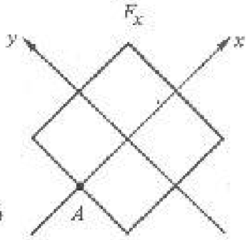


$$F_x = F_y = 300 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 150\sqrt{2}\ N$$

$$M_x = M_y = 150\sqrt{2} \times 200 = -3\sqrt{2} \times 10^4\ N.mm$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{12} \times 60 \times 60^3 = 1.08 \times 10^6 mm^4$$

$$T_z = 300 \times 300 = 9 \times 10^4\ N.mm$$

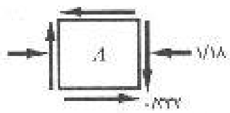


$$\sigma_A = -\frac{M_y c}{I_y} = -\frac{(-3\sqrt{2} \times 10^4) \times (-30)}{1.08 \times 10^6} = -1.18 MPa$$ فشاری

لنگر M_x روی نقطهٔ A تنش خمشی ایجاد نمی‌کند، زیرا این نقطه روی محور خنثی واقع است.

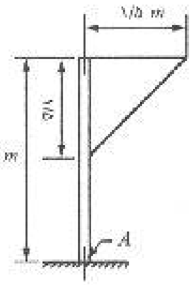
$$\tau_V = \frac{VQ}{It} = \frac{3}{2} \times \frac{F_y}{A} = \frac{3}{2} \times \frac{150\sqrt{2}}{60 \times 60} = 0.88 MPa$$

$$\tau_T = \frac{T_z}{\alpha a^3} = \frac{9 \times 10^4}{1 \times 60^3} = 0.42$$



$$\tau_A = 0.42 - 0.88 = 0.332$$

۱۰-۲۷. یک تابلو راهنمایی مثلثی شکل به یک پایه از نیمرخ لوله‌ای با قطر خارجی ۱۱۴/۳ میلی‌متر و ضخامت پوسته ۶/۰۲ میلی‌متر متصل شده است. مطلوب است محاسبهٔ تنشهای اصلی در نقطهٔ A در اثر باری به شدت ۲/۴ کیلونیوتن بر مترمربع که از طرف خواننده به تابلو می‌وزد. فقط اثر باد مورد نظر است و اثر وزن لوله و تابلو را وارد محاسبات ننمایید. از اثر مکش باد در طرف دیگر صفحهٔ علامت نیز، صرف‌نظر نمایید.



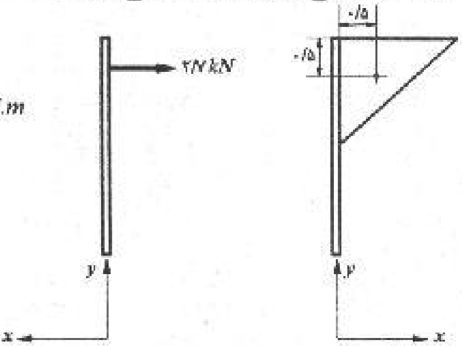
مسئله ۱۰-۲۷

$F = PA = (۲/۴)(\frac{۱}{۲} \times ۱/۵ \times ۱/۵) = ۲/۷\,kN$

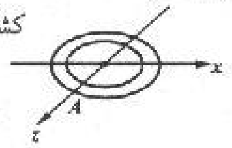
$M_z = F.h = ۲/۷ \times (۳/۲ - ۰/۵) = -۷/۲۹\,kN.m$

$T_y = F.r = ۲/۷ \times ۰/۵ = ۱/۳۵\,kN.m$

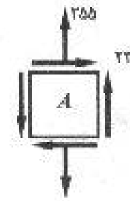
$I = \frac{\pi}{۶۴}(d_o^۴ - d_i^۴) = ۱۶۳۰۴۶۸\,mm^۴$



$$\sigma_B = -\frac{M_z z}{I} = -\frac{(-۷/۲۹ \times ۱۰^۶)\left(\frac{۱۱۴/۳}{۲}\right)}{۱۶۳۰۴۶۸} = ۲۵۵\,MPa$$ کششی



$$\tau_T = \frac{Tc}{J} = \frac{T\frac{d_o}{۲}}{۲I} = \frac{(۱/۳۵ \times ۱۰^۶)\left(\frac{۱۱۴/۳}{۲}\right)}{۲ \times ۱۶۳۰۴۶۸} = ۲۳/۷\ \ MPa$$



$\tau_V = ۰$

$$\sigma_{۱,۲} = \frac{۲۵۵}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{۲۵۵}{۲}\right)^۲ + (۲۳/۷)^۲} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_۱ = ۲۴۲/۲ \\ \sigma_۲ = -۲/۲ \end{cases}$$

۱۰-۲۸. یک تابلو راهنمایی به وزن ۱۸۰۰ نیوتن توسط لوله‌ای به قطر خارجی ۷۳ میلی‌متر و ضخامت پوستهٔ ۵/۱۶ میلی‌متر حمل می‌گردد. مقدار نیروی افقی ناشی از باد بر تابلو مساوی ۴۰۰ نیوتن تخمین زده شده است. مطلوب است تعیین حالت تنش در نقاط A و B ناشی از بار مرده و باد. محاسبهٔ تنشهای اصلی لازم نمی‌باشد. نتایج را به‌صورت ترسیمی در روی جزء سطحهای مربوطه نشان دهید. جزء سطح را از بیرون لوله مطالعه نمایید.

$M_z = ۱۸۰۰ \times ۱ = ۱۸۰۰\,N.m$ (جهت منفی)

$M_x = ۴۰۰ \times ۳ = ۱۲۰۰\,N.m$ (جهت منفی)

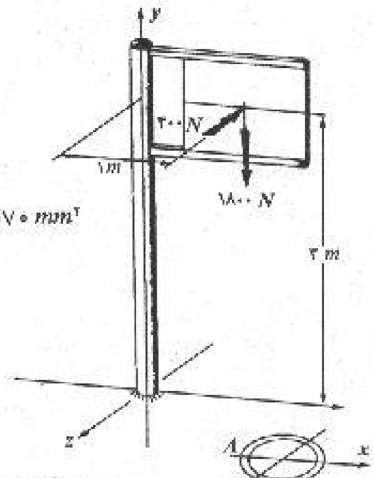
$T_y = ۴۰۰ \times ۱ = ۴۰۰\,N.m$ (جهت مثبت)

$$A = \frac{\pi}{۴}(d_o^۲ - d_i^۲) = \frac{\pi}{۴}\left[(۷۳)^۲ - (۶۷/۸۴)^۲\right] \Rightarrow A = ۵۷۰\,mm^۲$$

$$I = \frac{\pi}{۶۴}(d_o^۴ - d_i^۴) = ۳۵۴۲۸۳\,mm^۴$$

$$J = ۲I = ۷۰۸۵۶۶\,mm^۴$$

$$\sigma_L = \frac{P}{A} = \frac{۱۸۰۰}{۵۷۰} = ۳/۱۶\,MPa$$ فشاری



مسئله ۱۰-۲۸

$$\tau_T = \frac{Tc}{J} = \frac{(۴۰۰ \times ۱۰^{۳})\left(\frac{۷۳}{۲}\right)}{۷۰۸۵۶۶} = ۲۰/۶\, MPa$$

تنشهای فوق برای نقاط A و B یکسان می‌باشند.

تنشهای ناشی از خمش: ممان خمشی M_z با توجه به جهت منفی آن روی نقطه A ایجاد تنش کششی می‌کند و روی نقطه B اثری ندارد. برعکس ممان خمشی M_x روی نقطه B تنش کششی ایجاد نموده درحالیکه روی نقطه A اثری ندارد.

$$\left.\sigma_b\right)_A = \frac{M_z x}{I} = \frac{(۱۸۰۰ \times ۱۰^{۳})\left(\frac{۷۳}{۲}\right)}{۳۵۴۲۸۳} = ۱۸۵/۴\, MPa \quad \text{کششی}$$

$$\left.\sigma_b\right)_B = \frac{M_x z}{I} = \frac{(۱۲۰۰ \times ۱۰^{۳})\left(\frac{۷۳}{۲}\right)}{۳۵۴۲۸۳} = ۱۲۳/۶\, MPa \quad \text{کششی}$$

با توجه به این نکته که راستای نیروی برشی ($۴۰۰N$) هم‌راستا با محور z می‌باشد (در جهت منفی) بنابراین روی نقطه B تنش برشی ایجاد نمی‌کند.

$$\bar{y} = \frac{۲r}{\pi} = \frac{d_a}{\pi} \quad , \quad A = \frac{۱}{۲}(\pi\, d_a\, t)$$

$$Q = A\,\bar{y} = \frac{۱}{۲}\,.\, d_a^{۲}\,.t \quad , \quad I = \frac{۱}{۲}\pi\, r^{۳}\, t = \frac{۱}{۱۶}\pi\, d_a^{۳}\, t$$

$$\left.\tau_v\right)_A = \frac{VQ}{It} = \frac{V\left(\frac{۱}{۲}\,.\, d_a^{۲}\,.\, t\right)}{\left(\frac{۱}{۱۶}\pi\, d_a^{۳}\,.\, t\right)(۲t)} = \frac{۴V}{\pi\, d_a\, t} = \frac{۴V}{A}$$

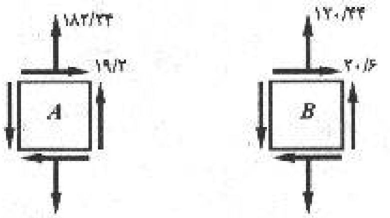
$$\left.\tau_v\right)_A = \frac{۴ \times ۴۰۰}{\pi(۷۰/۴۲)(۵/۱۶)} = ۱/۴\, MPa$$

$$\sigma_A = ۱۸۵/۴ - ۳/۱۶ = ۱۸۲/۲۴\, MPa$$

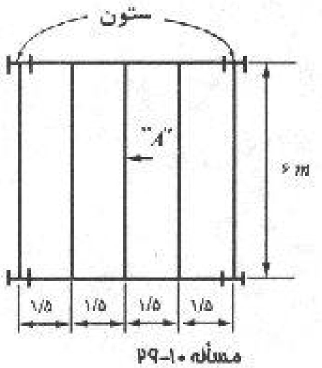
$$\sigma_B = ۱۲۳/۶ - ۳/۱۶ = ۱۲۰/۴۴\, MPa$$

$$\tau_A = ۲۰/۶ - ۱/۴ = ۱۹/۲\, MPa$$

$$\tau_B = ۲۰/۶\, MPa$$

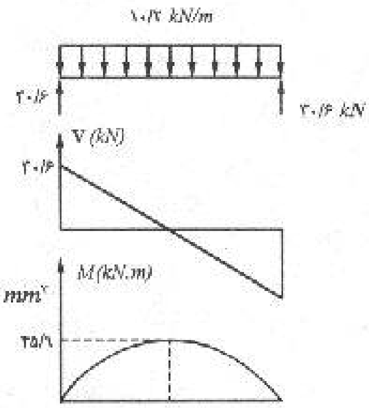


۱۰-۲۹. تیر ریزی سقف ساختمانی در شکل نشان داده شده است. مطلوب است طراحی تیر فولادی A با استفاده از نیمرخ پهن IPE، وزن مردهٔ سقف که شامل وزن مردهٔ خود تیر نیز می‌باشد، مساوی ۳/۸ کیلونیوتن بر مترمربع تخمین زده شده است. وزن زندهٔ سقف که شامل بارهایی است که در هنگام استفاده ممکن است بر سقف وارد گردد، مساوی ۳ کیلونیوتن بر مترمربع در نظر گرفته شده است. تنش



مسئله ۱۰-۲۹

مجاز خمشی را مساوی ۱۴۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع (مگاپاسکال) و تنش مجاز برشی را ۹۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.



$$W = W_D + W_L = ۶/۸ kN/m^۲$$

$$q = ۶/۸ \times \frac{۱/۵ \times ۶}{۶} = ۱۰/۲ kN/m$$

$$V_{max} = ۳۰/۶ kN \quad , \quad M_{max} = ۴۵/۹ kN.m$$

$$\sigma_{all} = \frac{M_{max}}{S} \Rightarrow S = \frac{M_{max}}{\sigma_{all}} = \frac{۴۵/۹ \times ۱۰^۶}{۱۴۰} = ۳۲۷۸۰۰ mm^۳$$

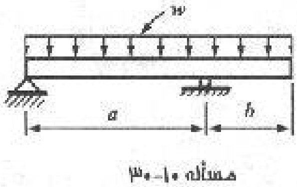
$$\Rightarrow S = ۳۲۷/۸ cm^۳$$

از جدول ۴ ضمیمه، نیمرخ IPE ۲۷۰ جوابگو می‌باشد امّا بهتر است نیمرخ IPE ۲۴۰ را انتخاب کرده و در صورت لزوم دو قطعه ورق تقویتی در وسط دهانه به آن جوش دهیم.
حال باید نیمرخ انتخاب شده برای برش هم امتحان شود.

$$\tau = \frac{VQ}{Is} = \frac{(۳۰۶۰۰)(۱۸۳ \times ۱۰^۳)}{(۳۸۹۰ \times ۱۰^۴)(۶/۲)} = ۲۳/۲ MPa$$

مقدار تنش برشی بدست آمده کمتر از مقدار مجاز ($۹۰ MPa$) بوده و مقطع انتخابی برای برش نیز جوابگو می‌باشد.

۱۰-۳۰. **مطلوب است انتخاب ابعاد مقطع تیر چوبی مستطیلی نشان داده شده در شکل. شدت بار گسترده که شامل وزن مردهٔ خود تیر نیز می‌باشد، مساوی ۲۰ کیلونیوتن بر متر است. تنش مجاز خمشی مساوی ۹ نیوتن بر میلی‌مترمربع و تنش مجاز برشی مساوی ۱ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد. a را مساوی ۳ متر، b را مساوی ۱/۵ متر و ارتفاع مقطع را دو برابر پهنای آن در نظر بگیرید.**



مسئله ۱۰-۳۰

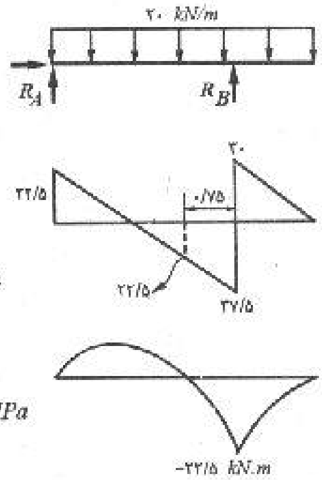
$$\sum M_A = ۰ \circlearrowright + \; : R_B \times ۳ - (۲۰ \times ۴/۵) \times ۲/۲۵ = ۰ \Rightarrow R_B = ۶۷/۵ kN$$

$$\sum F_y = ۰ \quad : R_A = ۲۰ \times ۴/۵ - ۶۷/۵ \Rightarrow R_A = ۲۲/۵ kN$$

$$M_{max} = \frac{۱}{۲}(۳۷/۵ + ۲۲/۵) \times ۰/۷۵ = ۲۲/۵ kN.m$$

$$M_{max} = \frac{۱}{۲} \times ۱/۵ \times ۳۰ = ۲۲/۵ kN.m$$

$$V_{max} = ۳۷/۵ kN$$



$$S = \frac{M_{max}}{\sigma_{all}} = \frac{۲۲/۵ \times ۱۰^{۶}}{۹} = ۲/۵ \times ۱۰^{۶}\, mm^{۳}$$

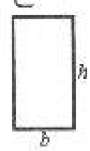
$$S = \frac{I}{c} = \frac{I}{h/۲} = \frac{۲ \times \left(\frac{۱}{۱۲} bh^{۳}\right)}{h} = \frac{۱}{۶} bh^{۲}$$

فرض مسأله: $h = ۲b \Rightarrow S = \frac{۲}{۳} b^{۳} \Rightarrow b = ۱۵۵/۴\, mm$

$$h = ۲b = ۳۱۰/۸\, mm$$

$$\tau_{max} = \frac{۳}{۲} \times \frac{V}{A} = \frac{۳}{۲} \times \frac{۳۷/۵ \times ۱۰^{۳}}{(۱۵۵/۴)(۳۱۰/۸)} = ۱/۱۶\, MPa$$

چون این مقدار از تنش مجاز برشی بیشتر است، پس مقطع انتخابی برای برش جوابگو نیست و باید تصحیح شود.



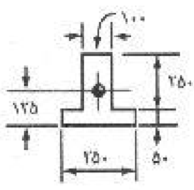
$$A = \frac{۳}{۲} \frac{V}{\tau_{max}} = \frac{۳}{۲} \times (۳۷/۵ \times ۱۰^{۳}) = ۵۶۲۵۰$$

$$A = bh = h(۲b) = ۲b^{۲} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{A}{۲}} = ۱۶۷/۷\, mm$$

با انتخاب $b = ۱۶۸mm$ مقطع برای برش نیز جوابگو می‌باشد.

$$h = ۲b = ۳۳۶$$

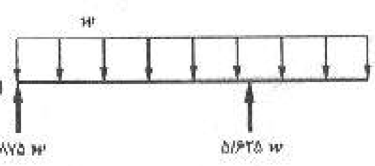
۱۰-۳۱. تیری مطابق شکل مسئلهٔ قبل با $a = ۵$ و $b = ۲/۵$ متر در نظر بگیرید. اگر مقطع تیر مطابق شکل نشان داده شده با لنگر ماندی در حول محور خنثی مساوی ۳۲۰×۱۰^{۶} میلی‌متر به توان ۴ در نظر گرفته شود، مطلوب است شدت مجاز بار گسترده در صورتی که تنش مجاز خمشی مساوی ۳۲۰×۱۰^{۶} میلی‌متر به توان ۴ درنظر گرفته شود، مطلوب است شدت مجاز بار گسترده در صورتی که تنش مجاز خمشی مساوی ۸/۴ و تنش مجاز برشی مساوی ۰/۷ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل برحسبت میلی‌متر می‌باشند.



مسأله ۱۰-۳۱

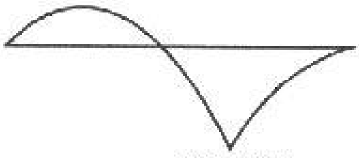
$$\sum M_A = ۰ \circlearrowright + : \quad R_B \times ۵ - ۷/۵\, w \times ۳/۷۵ = ۰ \qquad \Rightarrow R_B = ۵/۶۲۵\, w$$

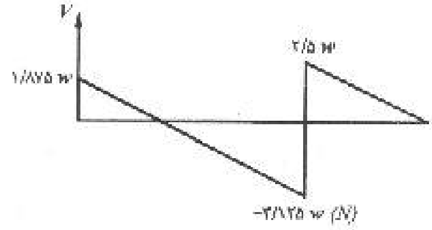
$$\sum F_y = ۰ \quad : \quad R_A + R_B = wL \Rightarrow R_A = ۱/۸۷۵\, w$$



$$\sigma_{all} = \frac{Mc}{I} = \frac{(۳/۱۲۵ w)(۰/۱۷۵)}{۳۲۰ \times ۱۰^{-۶}\, (m^{۴})} = ۸/۴ \times ۱۰^{۶}\, (N/m^{۲})$$

$$\Rightarrow W_{۱} = ۴۹۱۵\, N/m^{۲} = ۴/۹۱۵\, kN/m^{۲}$$





$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

با توجه به اینکه V و I ثابت می‌باشند برای اینکه τ بیشینه باشد باید نسبت $\frac{Q}{t}$ بیشینه باشد و بیشینه این نسبت برای مقطع فوق در مرکز هندسی آن می‌باشد:

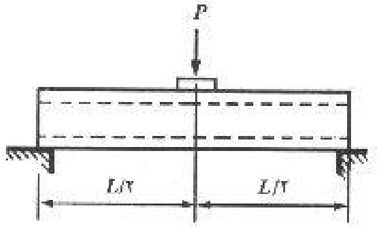
$$\tau_{all} = \frac{(۳/۱۲۵\,w)(۰/۱۷۵ \times ۰/۱)\left(\frac{۱۷۵}{۲}\right)}{(۳۲۰ \times ۱۰^{-۶})(۰/۱)} = ۰/۷ \times ۱۰^{۶} \Rightarrow w = ۴۶۸۱\ N/m$$

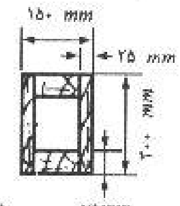
$$w_۲ = ۴/۶۸\ kN/m$$

بین دو مقدار بدست آمده برای w مقدار کوچکتر بار مجاز می‌باشد:

$$w = ۴/۶۸\ kN/m$$

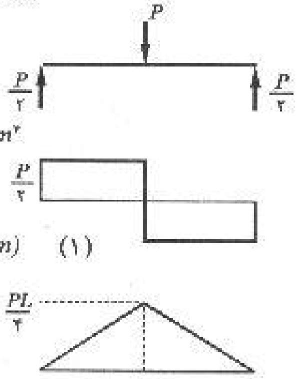
۱۰-۳۲. مطلوب است محاسبهٔ بار متمرکز مجاز P و طول دهانه و ابعاد صفحهٔ تقسیم فشار زیر بار متمرکز، در تیر نشان داده شده در شکل. تنش مجاز خمشی مساوی ۱۰، تنش مجاز برشی برای چوب مساوی ۰/۸۲۵ و برای اتصالات چسبی مساوی ۰/۴۱ و تنش لهیدگی در امتداد عمود بر تارهای چوب مساوی ۲/۸ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد. از وزن تیر صرف‌نظر نمایید.





مسأله ۱۰-۳۲

(ابعاد برحسب میلی‌متر)



$$V_{max} = \frac{P}{۲} \quad , \quad M_{max} = \frac{PL}{۴}$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۱۵۰)(۳۰۰)^۳ - \frac{۱}{۱۲}(۱۰۰)(۱۵۰)^۳ = ۳۰۹/۴ \times ۱۰^۶\ mm^۴$$

$$\sigma_{all} = \frac{Mc}{I} = \frac{\left(P\frac{L}{۴}\right)(۱۵۰)}{۳۰۹/۴ \times ۱۰^۶} = ۱۰ \Rightarrow PL = ۸۲/۵ \times ۱۰^۶\ (N.mm) \qquad (۱)$$

$$Q_۱ = (۱۰۰ \times ۷۵)\left(۱۵۰ - \frac{۷۵}{۲}\right) = ۸۴۳۷۵۰\ mm^۳$$

$$\tau_{(\text{چسب})} = \frac{VQ_۱}{It} = \frac{(\frac{P}{۲})(۸۴۳۷۵۰)}{(۳۰۹/۴ \times ۱۰^۶)(۷۵)} \Rightarrow P = ۲۲۵۵۰\,N$$

$$Q_۲ = (۱۰۰ \times ۷۵)\left(۱۵۰ - \frac{۷۵}{۲}\right) + (۲۵ \times ۱۵۰)(۷۵) \times ۲ = ۱۴۰۶۲۵۰\,mm^۳$$

$$\tau_{(\text{چوب})} = \frac{VQ_۲}{It} \Rightarrow ۰/۸۲۵ = \frac{(\frac{P}{۲})(۱۴۰۶۲۵۰)}{(۳۰۹/۴ \times ۱۰^۶)(۵۰)} \Rightarrow P = ۱۸۱۵۰\,N$$

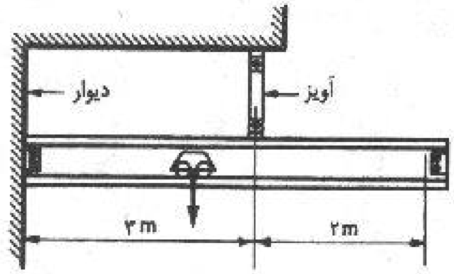
بین دو مقدار تنش برشی بدست آمده مقدار کمتر مورد قبول است:

$$P = ۱۸/۱۵kN$$

$$(۱) \quad \Rightarrow ۱۸۱۵۰ \times L = ۸۲/۵ \times ۱۰^۶ \Rightarrow L = ۴۵۴۵mm = ۴/۵۴\,m$$

$$\sigma_{all} = \frac{P/۲}{A} \Rightarrow A = \frac{P}{۲\sigma_{all}} = \frac{۱۸۱۵۰}{۲ \times ۲/۸} = ۳۲۴۱\,mm^۲$$

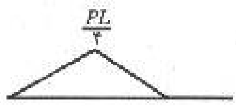
۱۰-۳۳. مطلوب است طراحی تیر جرثقیل سقفی نشان داده شده در شکل با استفاده از نیمرخ INP. ظرفیت جرثقیل مساوی ۳۶ کیلونیوتن می‌باشد و در محاسبات از وزن تیر صرف‌نظر نمایید. اتصال تیر به دیوار را مفصلی درنظر بگیرید. تنش مجاز خمشی مساوی ۸۵ و تنش مجاز برشی مساوی ۵۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشند.



مسأله ۱۰-۳۳

در حالتی که بار بین دو تکیه‌گاه است، لنگر خمشی ماکزیمم هنگامی رخ می‌دهد که بار در وسط دهانه قرار گیرد و نیروی برشی ماکزیمم وقتی ایجاد می‌شود که بار در محل تکیه‌گاه باشد (عملکرد تیر ساده)

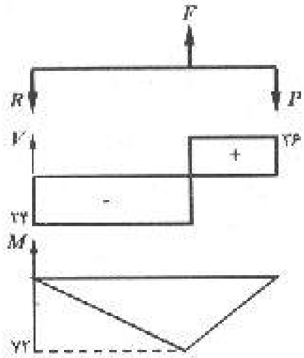
$$M_{max} = \frac{PL}{۴} = \frac{۳۶ \times ۳}{۴} = ۲۷\,kN.m$$



$$V_{max} = ۳۶\,kN$$

وقتی که بار سمت راست آویز باشد، لنگر خمشی ماکزیمم مربوط به حالتی است که بار بیشترین فاصله را از آویز داشته باشد یعنی در انتهای تیر.

$$۳۶ \times ۲ = R \times ۳ \Rightarrow R = ۲۴$$



$$M_{max} = ۲۴ \times ۳ = ۷۲\, kN.m$$

$$V_{max} = ۳۶\, kN$$

$$\sigma = \frac{M}{S} \Rightarrow S = \frac{M}{\sigma_{all}} = \frac{۷۲ \times ۱۰^{۶}}{۸۵} = ۸/۴۷ \times ۱۰^{۵}\, mm^{۳}$$

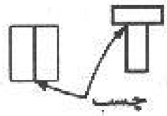
$$= ۸۴۷\, cm^{۳}$$

با استفاده از جدول ۳ ضمیمه INP ۳۴۰ مناسب می‌باشد.

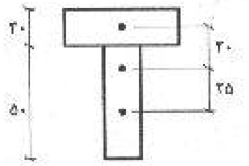
$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(۳۶۰۰۰)(۵۴۰ \times ۱۰^{۳})}{(۱۵۷۰۰ \times ۱۰^{۴})(۱۲/۲)} = ۱۰/۱۵\, MPa$$

که از مقدار تنش برشی مجاز کمتر بوده و قابل قبول است.

۱۰-۳۴. با چسباندن دو قطعه پلاستیکی به ابعاد ۶۰ × ۲۰ میلی‌متر به یکدیگر، می‌خواهیم تیر ساده‌ای به دهانه ۶۰۰ میلی‌متر که بار گستردهٔ یکنواختی را حمل می‌کند، بسازیم. به دو صورت نشان داده شده در شکل می‌توانیم این کار را انجام دهیم. اگر تنش مجاز خمشی مساوی ۴ و تنش مجاز برشی پلاستیک مساوی ۰/۶ و تنش برشی مجاز چسب مساوی ۰/۴ باشد، شدت بار گستردهٔ مجاز برای هر یک از حالات نشان داده شده چقدر می‌باشد.



مسئله ۱۰-۳۴



$$V_{max} = \frac{wL}{۲} = ۳۰۰\, w\ (N)$$

$$M_{max} = \frac{wL^{۲}}{۸} = ۴۵۰۰۰\, w\ (N.mm)$$

$$\bar{y}_{۱} = \frac{(۲۰ \times ۶۰)(۱۰) + (۲۰ \times ۶۰)(۲۰ + ۳۰)}{۲ \times ۲۰ \times ۶۰} = ۳۰\, mm$$

$$I_{۱} = \frac{۱}{۱۲}(۶۰)(۲۰)^{۳} + (۲۰ \times ۶۰)(۲۰)^{۲} + \frac{۱}{۱۲}(۲۰)(۶۰)^{۳} + (۲۰ \times ۶۰)(۲۰)^{۲}$$

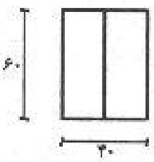
$$\Rightarrow I_{۱} = ۱/۳۶ \times ۱۰^{۶}\, mm^{۴}$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \Rightarrow ۴ = \frac{(۴۵۰۰۰\, w)(۵۰)}{۱/۳۶ \times ۱۰^{۶}} \Rightarrow w = ۲/۴\, N/mm$$

$$\tau_{p} = \frac{VQ}{It} \Rightarrow ۰/۶ = \frac{(۳۰۰\, w) \times [(۲۰ \times ۵۰)(۲۵)]}{(۱/۳۶ \times ۱۰^{۶})(۲۰)} \Rightarrow w = ۲/۱۷\, N/mm$$

$$\tau_{a} = \frac{VQ}{It} \Rightarrow ۰/۴ = \frac{(۳۰۰\, w) \times [(۲۰ \times ۶۰)(۲۰)]}{(۱/۳۶ \times ۱۰^{۶})(۲۰)} \Rightarrow w = ۱/۵۱\, N/mm$$

یعنی بار مجاز برای مقطع T شکل $۱/۵۱\, N/mm$ می‌باشد



$$I_۱ = \frac{۱}{۱۲}(۴۰)(۶۰)^۳ = ۷۲ \times ۱۰^۴\ mm^۴$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \Rightarrow ۴ = \frac{(۴۵۰۰۰۰w)(۳۰)}{۷۲ \times ۱۰^۴} \Rightarrow w = ۲/۱۳\, N/mm$$

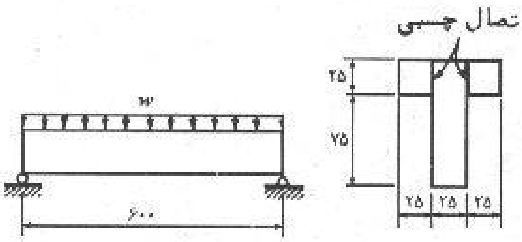
$$\tau_p = \frac{VQ}{It} \Rightarrow ۰/۶ = \frac{(۳۰۰w) \times \left[(۴۰ \times ۳۰)(۱۵)\right]}{(۷۲ \times ۱۰^۴)(۴۰)} \Rightarrow w = ۳/۲\, N/mm$$

$$\tau_a = ۰$$

کمترین مقدار بار مجاز می‌باشد:

$$w = ۱/۵۱\, N/mm = ۱۵۱۰\, N/m$$

۳۵-۱۰. مطلوب است محاسبهٔ شدت مجاز بار گستردهٔ یکنواختی که می‌تواند بر تیر پلاستیکی نشان داده شده در شکل وارد گردد (بار گسترده شامل وزن خود تیر نیز می‌باشد). تنش مجاز خمشی مساوی ۳/۵، تنش برشی مجاز پلاستیک مساوی ۰/۷ و تنش برشی مجاز چسب، مساوی ۰/۳۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل برحسب میلی‌متر مربع می‌باشند.



مسأله ۱۰-۳۵

$$V_{max} = R_A = \frac{wL}{۲} = ۳۰۰w \qquad M_{max} = \frac{wL^۲}{۸} = ۴۵۰۰۰۰w$$

$$\bar{y} = \frac{۲ \times (۲۵ \times ۲۵)(۱۲/۵) + (۲۵ \times ۱۰۰)(۵۰)}{۲ \times (۲۵ \times ۲۵) + ۲۵ \times ۱۰۰} = ۳۷/۵$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۲۵)(۱۰۰)^۳ + (۲۵ \times ۱۰۰)(۵۰ - ۳۷/۵)^۲ + ۲\left[\frac{۱}{۱۲}(۲۵)(۲۵)^۳ + (۲۵ \times ۲۵)(۳۷/۵ - ۱۲/۵)^۲\right]$$

$$\Rightarrow I = ۳/۳۲ \times ۱۰^۶\ mm^۴$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \Rightarrow ۳/۵ = \frac{(۴۵۰۰۰۰w)(۶۲/۵)}{۳/۳۲ \times ۱۰^۶} \Rightarrow w = ۴/۱۳\, N/mm$$

$$Q_a = (۲۵ \times ۲۵)(۳۷/۵ - ۱۲/۵) = ۱۵۶۲۵\, mm^۳$$

$$\tau_a = \frac{VQ_a}{It} \Rightarrow ۰/۳۵ = \frac{(۳۰۰w)(۱۵۶۲۵)}{(۳/۳۲ \times ۱۰^۶)(۲۵)} \Rightarrow w = ۶/۱۹\, N/mm$$

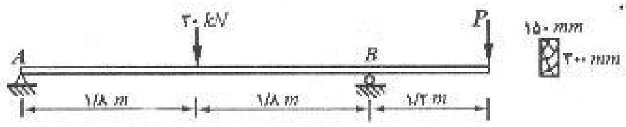
$$Q_p = (۲۵ \times ۶۲/۵)\left(\frac{۶۲/۵}{۲}\right) = ۴۸۸۲۸\,mm^۳$$

$$\tau_p = \frac{VQ_p}{It} \Rightarrow ۰/۷ = \frac{(۳۰۰\,w)(۴۸۸۲۸)}{(۳/۳۲ \times ۱۰^۶)(۲۵)} \Rightarrow w = ۳/۹۷\,N/mm$$

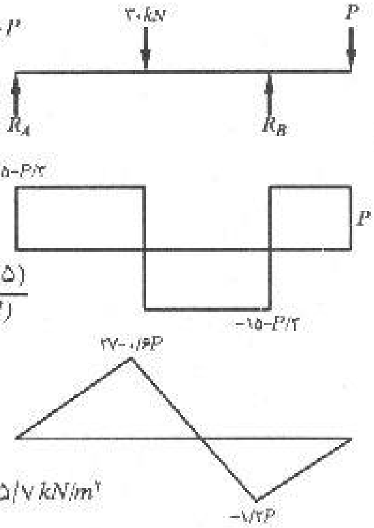
بین مقادیر بدست آمده کمترین مقدار بار مجاز خواهد بود.

$$w = ۳/۹۷\,N/mm = ۳/۹۷\,kN/m$$

۱۰-۳۶. **تنش مجاز خمشی برای تیر نشان داده شده در شکل مساوی ۸/۵ ± نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد. اگر بار ۳۰ نیوتنی به تنهایی بر تیر وارد گردد، تنش خمشی ایجاد شده در تیر از مقدار مجاز تجاوز می‌کند. مطلوب است محاسبهٔ حداقل بار P به طوری که تنشهای خمشی از حد تجاوز نکنند. (ب) پس از تعیین بار P، حداکثر تنش برشی ایجاد شده در تیر را به‌دست آورید.**



مسأله ۱۰-۳۶



$$R_B(۳/۶) - ۳۰(۱/۸) - P(۴/۸) = ۰ \Rightarrow R_B = ۱۵ + \frac{۴}{۳}P$$

$$R_A + R_B = ۳۰ + P \quad \Rightarrow R_A = ۱۵ - \frac{P}{۳}$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}(۱۵۰)(۳۰۰)^۳ \Rightarrow I = ۳۳۷/۵ \times ۱۰^۶\,mm^۴$$

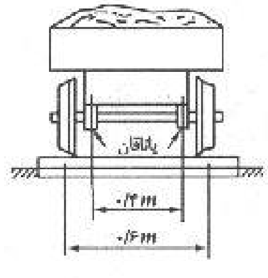
$$\sigma_{all} = \frac{Mc}{I} \Rightarrow ۸/۵ \times ۱۰^۳\,(kN/m^۲) = \frac{(۲۷ - ۰/۶P)(۰/۱۵)}{۳۳۷/۵ \times ۱۰^{-۶}\,(m^۴)}$$

$$\Rightarrow P = ۱۳/۱\,kN$$

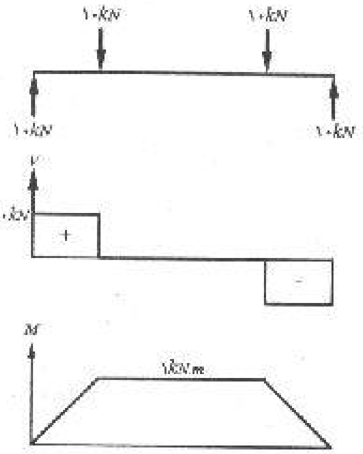
$$V_{max} = -۱۵ - \frac{۱۳/۱}{۳} = -۱۹/۳۷\,kN$$

$$\tau_{max} = \frac{۳}{۲}\frac{V_{max}}{A} = \frac{۳}{۲} \times \frac{۱۹/۳۷}{(۰/۳) \times (۰/۱۵)} \Rightarrow \tau_{max} = ۶۴۵/۷\,kN/m^۲$$

۱۰-۳۷. مطلوب است محاسبهٔ قطر محور واگن چهارچرخهٔ نشان داده شده در شکل. وزن واگن با بار روی آن مساوی ۴۰ کیلونیوتن می‌باشد. تنش مجاز خمشی را مساوی ۸۰ و تنش برشی مجاز را مساوی ۴۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.



مسأله ۱۰-۳۷



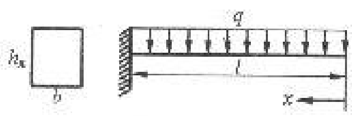
$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{۳۲\,M}{\pi\, d^۳} = \frac{(۳۲)(۱ \times ۱۰^۶)}{\pi \,.\, d^۳} = ۸۰$$

$$\Rightarrow d_۱ = ۵۰/۳\ mm$$

$$\tau_{max} = \frac{۴}{۳}\left(\frac{V}{A}\right) = \frac{۱۶\,V}{۳\,\pi\, d^۲} = ۴۰ \Rightarrow d_۲ = ۲۰/۶\ mm$$

$$d = max\,(d_۱\,,\,d_۲) = ۵۰/۳\ mm$$

۱۰-۳۸. یک تیر طره‌ای با مقاومت ثابت برای بار گستردهٔ یکنواخت طراحی نمایید. پهنای تیر را ثابت فرض کنید.



$$M_x = q\,\frac{x^۲}{۲} \qquad \sigma = \frac{M_x\, c_x}{I_x}$$

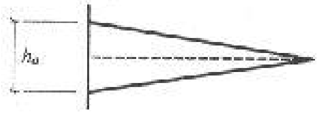
$$c_x = \frac{h_x}{۲} \qquad I_x = \frac{۱}{۱۲}\, b h_x^۳$$

$$\sigma = \frac{\left(q \,.\, \frac{x^۲}{۲}\right)\left(\frac{h_x}{۲}\right)}{\frac{۱}{۱۲}\, b\, h_x^۳} \Rightarrow h_x^۲ = \frac{۳q}{b\sigma}x^۲ \Rightarrow h_x = \sqrt{\frac{۳q}{b\sigma}}\,x$$

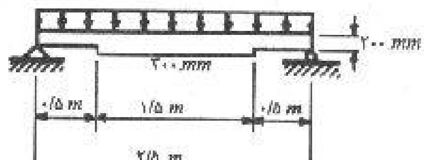
همانگونه که ملاحظه می‌شود ارتفاع تیر رابطه مستقیم با طول آن دارد.

$$h_۰ = \sqrt{\frac{۳q}{b\sigma}} \times L \Rightarrow \sqrt{\frac{۳q}{b\sigma}} = \frac{h_۰}{L}$$

$$h_x = \frac{h_۰}{L}\,x$$



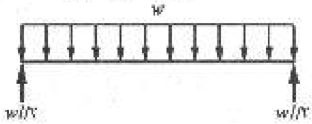
۱۰-۳۹. پهنای تیر مستطیلی نشان داده شده در شکل مساوی ۱۵۰ میلی‌متر می‌باشد. در صورتی که تنش مجاز خمشی مساوی ۱۰ و تنش مجاز برشی مساوی ۱ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، شدت مجاز بار گستردهٔ یکنواخت را تعیین نمایید. در محاسبات از وزن تیر و تمرکز تنش در نقطهٔ تغییر مقطع صرف‌نظر نمایید.



مسأله ۱۰-۳۹

$$R_A = \frac{wL}{۲} = ۱/۲۵\,(m) \times w\,(N/m) = ۱/۲۵\,w\,(N)$$

$$V_{max} = ۱/۲۵\,w\,(N)$$



$$M(x) = \frac{wL}{۲}x - \frac{wx^۲}{۲}$$

$$\frac{dM}{dx} = ۰ \rightarrow x = \frac{L}{۲} \rightarrow M_{max} = M\left(\frac{L}{۲}\right) = \frac{qL^۲}{۸} = ۰/۷۸\,w$$

$$M(۰/۵) = w\left(\frac{۲/۵}{۲}\right)(۰/۵) - \frac{w\,(۰/۵)^۲}{۲} = ۰/۵w$$

$$I_۱ = \frac{۱}{۱۲}(۰/۱۵)(۰/۳)^۳ = ۳۳/۷۵ \times ۱۰^{-۵}\,m^۴$$

$$I_۲ = \frac{۱}{۱۲}(۰/۱۵)(۰/۲)^۳ = ۱۰ \times ۱۰^{-۵}\,m^۴$$

$$\sigma = \frac{M_۱\,c_۱}{I_۱} \Rightarrow ۱۰ \times ۱۰^۶\,(N/m^۲) = \frac{(۰/۷۸\,w)(۰/۱۵)}{۳۳/۷۵ \times ۱۰^{-۵}} \Rightarrow w = ۲۸۸۴۶\,N/m$$

$$\sigma = \frac{M_۲\,c_۲}{I_۱} \Rightarrow ۱۰ \times ۱۰^۶ = \frac{(۰/۵\,w)(۰/۱)}{۱۰ \times ۱۰^{-۵}} \Rightarrow w = ۲۰۰۰۰\,N/m$$

$$\tau = \frac{VQ}{I_۲\,t} = \frac{(۱/۲۵\,w)\left[(۰/۱۵)(۰/۱) \times (۰/۰۵)\right]}{(۱۰ \times ۱۰^{-۵})(۰/۱۵)} = ۱ \times ۱۰^۶ \Rightarrow w = ۱۶۰۰۰\,N/m$$

کمترین مقدار w بار مجاز می‌باشد:

$$w = ۱۶\,kN/m$$

۱۰-۴۰. (الف) نشان دهید که تنش اصلی بزرگتر برای یک محور استوانه‌ای که تحت اثر توأم لنگر خمشی و لنگر پیچشی می‌باشد، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\sigma_۱ = (c/J)\,(M + \sqrt{M^۲ + T^۲})$$

(ب) نشان دهید که رابطهٔ طراحی محورهای استوانه‌ای بر پایهٔ فرضیهٔ تنش حداکثر به‌صورت زیر است:

$$d = \sqrt[۳]{\left[\frac{۱۶}{(\pi\tau_{allow})}\right](M + \sqrt{M^۲ + T^۲})}$$

الف) برای مقطع دایره‌ای $J = ۲I$ بنابراین:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{۲Mc}{J} \quad , \quad \tau = \frac{Tc}{J}$$

$$\sigma_۱ = \frac{\sigma}{۲} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{۲}\right)^۲ + \tau^۲} = \frac{Mc}{J} + \sqrt{\left(\frac{Mc}{J}\right)^۲ + \left(\frac{Tc}{J}\right)^۲} = \left(\frac{c}{J}\right)\left(M + \sqrt{M^۲ + T^۲}\right)$$

ب)

$$\frac{c}{J} = \frac{\frac{d}{۲}}{\frac{\pi\, d^۴}{۳۲}} = \frac{۱۶}{\pi\, d^۳}$$

$$\sigma_{all} = \sigma_۱ = \left(\frac{۱۶}{\pi d^۳}\right)\left(M + \sqrt{M^۲ + T^۲}\right) \Rightarrow d = \sqrt[۳]{\left[\frac{۱۶}{\pi \sigma_{all}}\right]\left(M + \sqrt{M^۲ + T^۲}\right)}$$

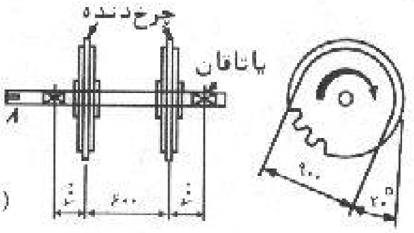
۱۰-۴۱. در مقطع بحرانی از یک محور استوانه‌ای توپر، لنگر پیچشی مساوی ۴۰ کیلونیوتن‌متر و لنگر خمشی مساوی ۱۰ کیلونیوتن‌متر می‌باشد. مطلوب است تعیین قطر لازم طوری که تنش برشی حداکثر (اصلی)، از ۵۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع تجاوز نکند.

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{۳۲M}{\pi\, d^۳} \qquad , \qquad \tau = \frac{Tc}{J} = \frac{۱۶T}{\pi d^۳}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{۲}\right)^۲ + \tau^۲} = \left(\frac{۱۶}{\pi d^۳}\right)\sqrt{M^۲ + T^۲} = \left(\frac{۱۶}{\pi d^۳}\right)\sqrt{(۱۰ \times ۱۰^۶)^۲ + (۴۰ \times ۱۰^۶)^۲}$$

$$= \frac{۲۰۹۹۸۸}{d^۳} < ۵۰ \Rightarrow d > ۱۶/۱\, mm$$

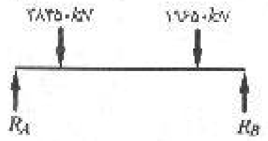
۱۰-۴۲. محور رأسی یک بالابر شیبدار مطابق شکل می‌باشد. نیروی محرکه این محور در نقطه A وارد می‌شود و آن را با سرعت ۱۱ دور در دقیقه با توان مصرفی ۴۰ کیلووات، به‌طور یکنواخت به دوران در می‌آورد. در صورتی که توان مصرفی هر یک از چرخ دنده‌های زنجیرخور مساوی ۲۰ کیلووات باشد، مطلوب است تعیین قطر محور به نحوی که حداکثر تنش برشی از ۴۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع تجاوز نکند. اثر تمرکز تنش در تنش مجاز درنظر گرفته شده است.



مسئله ۱۰-۴۲

$$T = ۹۵۴۰ \frac{kW}{n} \qquad T_۱ = ۹۵۴۰ \frac{۴۰}{۱۱} = ۳۴۶۹۰\, N.m \text{ و } T_۲ = ۹۵۴۰ \times \frac{۲۰}{۱۱} = ۱۷۳۵۰\, Nm$$

$$T_۱ = \Delta F_۱ \, . \, r \Rightarrow \Delta F_۱ = \frac{۳۴۶۹۰}{۰/۹} = ۳۸۵۴۰\, N \text{ و } \Delta F_۲ = \frac{۱۷۶۹۰}{۰/۹} = ۱۹۶۵۰\, N$$

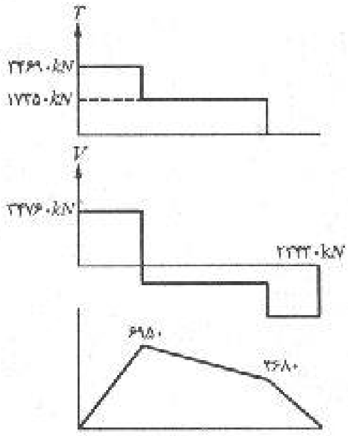


$$\sum M_A = ۰ \circlearrowleft + : \ R_B \times ۱ = (۱۹۶۵۰)(۰/۸) - (۳۸۵۴۰)(۰/۲) = ۰$$

$$\rightarrow R_B = ۲۳۴۳۰\, N$$

$$\sum F_y = ۰ \quad : R_A + R_B = ۳۸۵۴۰ + ۱۹۶۵۰$$

$$\rightarrow R_A = ۳۴۷۶۰\, N$$



با توجه به نمودارهای ممان خمشی، ممان پیچشی و نیروی برشی به‌وضوح مشخص است که نقطه بحرانی محور در محل چرخدنده سمت چپ واقع است.

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{۳۲M}{\pi d^۳} = \frac{۳۲(۶۹۵۰)}{\pi d^۳} = \frac{۷۰۷۹۲}{d^۳}$$

$$\tau_T = \frac{Tc}{J} = \frac{۱۶T}{\pi d^۳} = \frac{۱۶(۳۴۶۹۰)}{\pi d^۳} = \frac{۱۷۶۰۷۵}{d^۳}$$

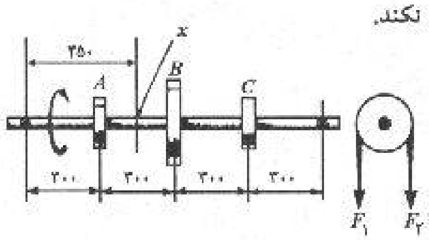
$$\tau_{V max} = \frac{۴}{۳} \times \frac{V}{A} = \frac{۴}{۳} \times \frac{۴(۳۴۷۶۰)}{\pi d^۲} = \frac{۵۹۰۱۰}{d^۲}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{۲}\right)^۲ + \tau^۲} \Rightarrow ۴۰ \times ۱۰^۶ \ (N/m^۲) = \sqrt{\left(\frac{۳۵۳۹۶}{d^۳}\right)^۲ + \left(\frac{۱۷۶۰۷۵}{d^۳} + \frac{۵۹۰۱۰}{d^۲}\right)^۲}$$

با استفاده از روش سعی و خطا مقدار قطر محور بدست می‌آید:

$$d = ۰/۱۶۷m = ۱۶۷mm$$

۱۰-۴۳. **محوری استوانه‌ای مطابق شکل مفروض است. چرخ‌دندهٔ B، چرخ‌دندهٔ محرک محور می‌باشد. چرخ‌دنده A، ۱۲۰۰ نیوتن‌متر و چرخ‌دندهٔ C، ۴۰۰ نیوتن متر لنگر پیچشی جذب می‌نمایند. برآیند نیروی کششی هر چرخ‌دنده مساوی ۱۸۰۰ نیوتن و به سمت پایین می‌باشد. مطلوب است محاسبهٔ قطر محور به‌طوری که تنش برشی حداکثر (اصلی) از ۴۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع تجاوز نکند.**



مسأله ۱۰-۴۳

با توجه به نمودار لنگر خمشی و لنگر پیچشی نقطه B (سمت چپ آن) نقطه بحرانی می‌باشد.

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{۳۲\, M}{\pi\, d^۳} \ , \ M = ۱۰۸۰ \Rightarrow \sigma = \frac{۱۱۰۰۱}{d^۳}$$

$$\tau_T = \frac{Tc}{J} = \frac{16\,T}{\pi\, d^3} \quad , \; T = 1200 \Rightarrow \tau_T = \frac{6111/5}{d^3}$$

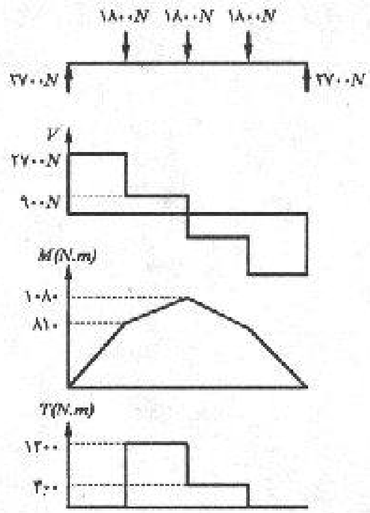
$$\tau_V = \frac{4}{3}\left(\frac{V}{A}\right) = \frac{16\,V}{3\pi\, d^2} \; , \quad V = 900 \Rightarrow \tau_V = \frac{1528}{d^2}$$

$$\tau = \tau_T + \tau_V$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{5500/5}{d^3}\right)^2 + \left(\frac{6111/5}{d^3} + \frac{1528}{d^2}\right)^2}$$

$$\tau_{max} = 40 \times 10^6 \; N/m^2$$



با استفاده از روش سعی و خطا مقدار d بدست می‌آید:

$$d = 0/059\, m = 59\, mm$$

جواب را برای ناحیه با نیروی برشی N ۲۷۰۰ امتحان می‌کنیم:

$$\tau = \frac{4}{3} \times \frac{2700}{\frac{\pi (59)^2}{4}} = 1/3\, N/mm^2$$

۱۰-۴۳. اگر قطر محور مسأله قبل ۵۰ میلی‌متر باشد، مطلوب است محاسبهٔ مقدار و امتداد تنشهای اصلی در نقطه x.

$$M = 2700 \times 450 - 1800 \times 150 = 945 \times 10^3 N.mm$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{32\,M}{\pi\, d^3} = \frac{(32)(945 \times 10^3)}{\pi\,(50)^3} \Rightarrow \sigma = 77\, N/mm^2$$

$$\tau_V = \frac{4}{3} \times \frac{V}{A} = \frac{4}{3} \times \frac{900}{\pi\,(25)^2} = 0/6\, N/mm^2$$

$$\tau_T = \frac{Tc}{J} = \frac{16T}{\pi\, d^3} = \frac{16(1200 \times 10^3)}{\pi\,(50)^3} = 48/9\, N/mm^2$$

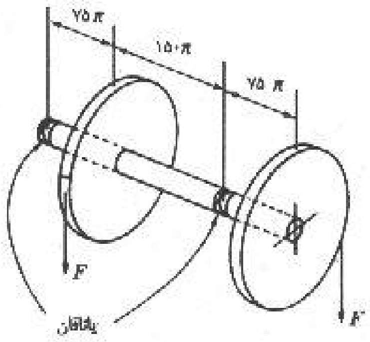
$$\tau = \tau_V + \tau_T = 49/5\, N/mm^2$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{77}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{77}{2}\right)^2 + (49/5)^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 101/2\, MPa \\ \sigma_2 = -\,24/2\, MPa \end{cases}$$

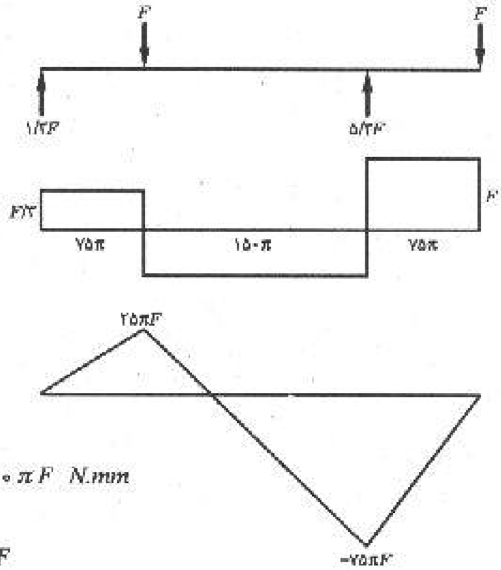
$$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times 49/5}{77} = 1/28 \;\Rightarrow\; 2\theta = 52^\circ \;\Rightarrow\; \theta = 26^\circ$$

۱۰-۴۴. مطابق شکل، دو چرخ دنده هرکدام به قطر π ۱۰۰ میلی‌متر، به یک محور به قطر ۴۰ میلی‌متر که دارای دو یاتاقان در نقاط نشان داده شده می‌باشد، سوار شده‌اند. اگر تنش برشی

حداکثر به ۳۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع محدود شده باشد، حداکثر مقدار نیروی F چقدر خواهد بود. اثر نیروی برشی مستقیم V را لازم نیست در محاسبات وارد نمایید.



مسئله ۱۰-۴۴



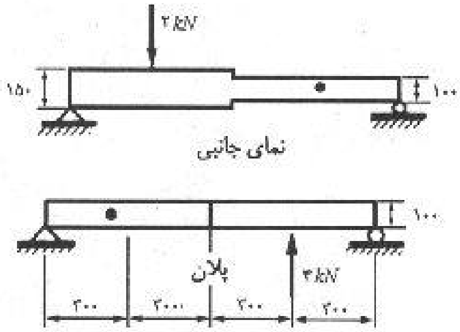
$M_{max} = ۷۵ \pi F \;\; N.mm \qquad , \qquad T = Fr = ۵۰ \pi F \;\; N.mm$

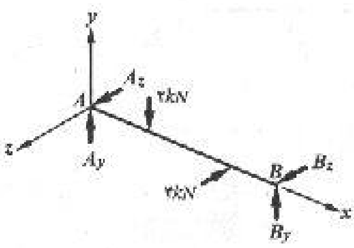
$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{۳۲ M}{\pi d^۳} = \frac{۳۲(۷۵ \pi F)}{\pi (۴۰)^۳} = ۰/۰۳۷۵F$$

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{۱۶ T}{\pi d^۳} = \frac{۱۶(۵۰ \pi F)}{\pi (۴۰)^۳} = ۰/۰۱۲۵F$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{۰/۰۳۷۵F}{۲}\right)^۲ + (۰/۰۱۲۵F)^۲} = ۳۵ \Rightarrow F = ۱۵۵۳N$$

۱۰-۴۵. با صرف‌نظر کردن از وزن تیر و تمرکز تنش در نقطهٔ تغییر مقطع، حداکثر تنش خمشی برای تیر نشان داده شده در شکل را تعیین نمایید. تمام اندازه‌های شکل برحسب میلی‌متر می‌باشند.





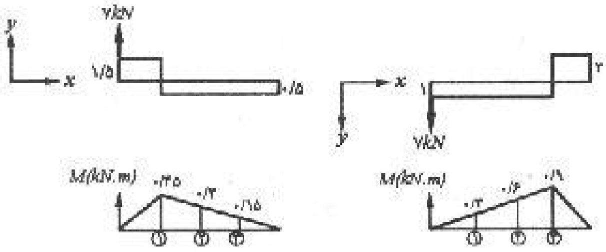
مسئله ۱۰-۴۵

$\sum M_z$ (حول A) $: -B_y \times ۱/۲ + ۲ \times ۰/۳ = ۰ \Rightarrow B_y = ۰/۵kN$

$\sum F_y = ۰ \qquad : A_y + B_y = ۲\ kN \Rightarrow A_y = ۱/۵kN$

$\sum M_y$ (حول A) $: -B_z \times ۱/۲ + ۴ \times ۰/۹ = ۰ \Rightarrow B_z = ۳\,kN$

$\sum F_z = ۰ \qquad : A_z + B_z = ۴\,kN \Rightarrow A_z = ۱\,kN$



$$I_{1y} = \frac{۱}{۱۲}(۰/۱)(۰/۱۵)^۳ = ۲۸/۱ \times ۱۰^{-۶}\,m^۴ \quad , \quad I_{1z} = \frac{۱}{۱۲}(۰/۱۵)(۰/۱)^۳ = ۱۲/۵ \times ۱۰^{-۶}\,m^۴$$

$$I_{2y} = \frac{۱}{۱۲}(۰/۱)(۰/۱)^۳ = ۸/۳ \times ۱۰^{-۶}\,m^۴ \quad , \quad I_{2z} = \frac{۱}{۱۲}(۰/۱)(۰/۱)^۳ = ۸/۳ \times ۱۰^{-۶}\,m^۴$$

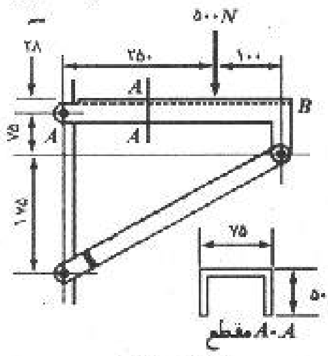
$$\sigma_1 = \frac{M_1\, c_y}{I_{1y}} + \frac{M_1'\, c_z}{I_{1z}} = \frac{(۴۵۰)\left(\frac{۰/۱۵}{۲}\right)}{۲۸/۱ \times ۱۰^{-۶}} + \frac{(۳۰۰)\left(\frac{۰/۱}{۲}\right)}{۱۲/۵ \times ۱۰^{-۶}} = ۲/۴ \times ۱۰^۶\,N/m^۲ = ۲/۴\,MPa$$

$$\sigma_1 = \frac{M_2\, c_y}{I_{2y}} + \frac{M_2'\, c_z}{I_{2z}} = \frac{(۳۰۰)\left(\frac{۰/۱}{۲}\right)}{۸/۳ \times ۱۰^{-۶}} + \frac{(۶۰۰)\left(\frac{۰/۱}{۲}\right)}{۸/۳ \times ۱۰^{-۶}} = ۵/۴۲ \times ۱۰^۶\,N/m^۲ = ۵/۴۲\,MPa$$

$$\sigma_3 = \frac{M_3\, c_y}{I_{2y}} + \frac{M_3'\, c_z}{I_{2z}} = \frac{(۱۵۰)\left(\frac{۰/۱}{۲}\right)}{۸/۳ \times ۱۰^{-۶}} + \frac{(۹۰۰)\left(\frac{۰/۱}{۲}\right)}{۸/۳ \times ۱۰^{-۶}} = ۶/۳۲ \times ۱۰^۶\,N/m^۲ = ۶/۳۲\,MPa$$

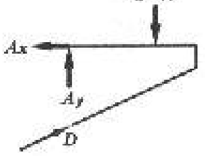
$\sigma_{max} = ۶/۳۲\,MPa$

۱۰-۴۶. مطلوب است تعیین حداکثر تنش در قطعه AB از شکل زیر. قطعه AB از ورقی به ضخامت ۲ میلی‌متر ساخته شده است. تمام اتصالات مفصلی می‌باشند و لنگر ماند مقطع قطعه AB در حول محور خنثی مساوی $۱۰^۳ \times ۱۳۰$ میلی‌متر به توان ۴ می‌باشد.



مسأله ۱۰-۴۶

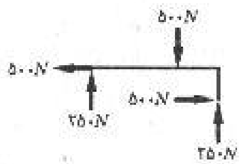
$\sum M_D = ۰ \circlearrowleft + : A_x(۲۵۰) - ۵۰۰(۲۵۰) = ۰ \rightarrow A_x = ۵۰۰\,N$



$\sum F_x = ۰ \quad : D_x = ۵۰۰\,N \quad , \quad D_y = \frac{۱۷۵}{۳۵۰}(D_x) = ۲۵۰\,N$

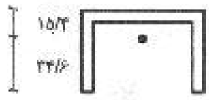
$$\sum F_y = ۰ \quad : A_y + D_y = ۵۰۰ \ \Rightarrow A_y = ۲۵۰\, N$$

$$V_{max} = ۲۵۰\ N \quad , \quad M_{max} = ۲۵۰ \times ۲۵۰ = ۶۲۵۰۰\, N.mm$$



$$y = \frac{(۵۰ \times ۳)(۲۵) \times ۲ + (۷۵ - ۶)(۳)(۱/۵)}{۵۰ \times ۳ \times ۲ + ۶۹ \times ۳} = ۱۵/۴$$

$$\sigma_b = \frac{Mc}{I} = \frac{(۶۲۵۰۰)(۳۴/۶)}{۱۳۰ \times ۱۰^۳} = ۱۶/۶\, MPa$$



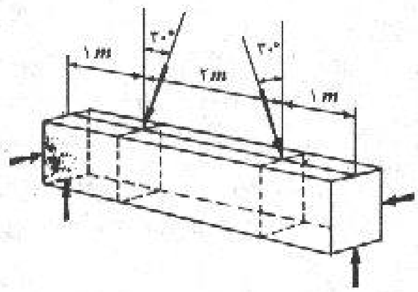
$$\sigma_L = \frac{P}{A} = \frac{۵۰۰}{۵۰۷} = ۰/۹\, MPa$$

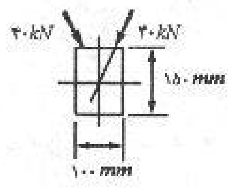
$$\sigma = ۱۶/۶ + ۰/۹ = ۱۷/۵\, MPa$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(۲۵۰)\left(۳۴/۶ \times ۳ \times \frac{۳۴/۶}{۲}\right) \times ۲}{(۱۳۰ \times ۱۰^۳)(۶)} = ۱/۱۵\, MPa$$

$$\sigma_{۱,۲} = \frac{۱۷/۵}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{۱۷/۵}{۲}\right)^۲ + (۱/۱۵)^۲} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_۱ = ۱۷/۵۷\ MPa \\ \sigma_۲ = -۰/۰۷\ MPa \end{cases}$$

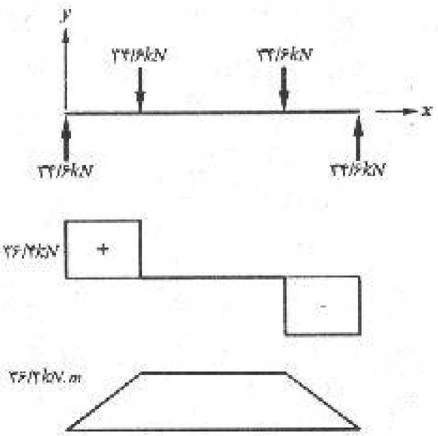
۱۰-۴۷. یک تیر به دهانهٔ ۴ متر، مطابق شکل بارگذاری شده است. نیروهای مایل نشان داده شده، در صفحاتی عمود بر محور تیر تأثیر می‌نمایند و از مرکز هندسی سطح مقطع تیر عبور می‌کنند. مطلوب است تعیین محل و مقدار تنش خمشی حداکثر. از وزن تیر صرف‌نظر نمایید.

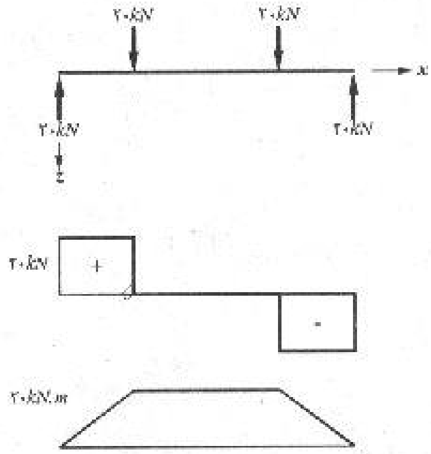




مسأله ۱۰-۴۷

$F_y = ۴۰ \times \cos ۳۰^\circ = ۳۴/۶\, kN$ $\qquad$ $F_z = ۴۰ \times \sin ۳۰^\circ = ۲۰\, kN$





$I_۱ = \frac{۱}{۱۲}(۱۰۰)(۱۵۰)^۳ = ۲۸/۱۲۵ \times ۱۰^۶\, mm^۴ \quad I_۲ = \frac{۱}{۱۲}(۱۵۰)(۱۰۰)^۳ = ۱۲/۵ \times ۱۰^۶\, mm^۴$

$$\sigma_۱ = \pm \frac{M_۱ c_۱}{I_۱} = \frac{(۳۴/۶ \times ۱۰^۶)(۷۵)}{(۲۸/۱۲۵ \times ۱۰^۶)} = \pm\ ۹۲/۳\, MPa$$

$$\sigma_۲ = \pm \frac{M_۲ c_۲}{I_۲} = \frac{(۲۰ \times ۱۰^۶)(۵۰)}{(۱۲/۵ \times ۱۰^۶)} = \pm\ ۸۰\, MPa$$

$$\sigma_{max} = \sigma_۱ + \sigma_۲ = \pm\ ۱۷۲\, MPa$$

محل تنش خمشی حداکثر در فاصله بین دوبار می‌باشد.